John Nashs zweiter Beweis der Existenz von Nash-Gleichgewichten

Johannes Brumm

28. Juni 2004

Im Jahre 1950 beweist John Nash in seinem Aufsatz *Equilibrium Points in N-Person Games* mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Kakutani, dass jedes endliche Spiel ein Nash-Gleichgewicht[1] besitzt. Ein Jahr später legt Nash in *Non-cooperative Games* einen zweiten Beweis dieses Existenzsatzes vor. Er schreibt dazu:

> The proof given here is a considerable improvement over that earlier version and is based directly on the Brouwer theorem. (Nash 1951, S.288)

Ein erster Vorzug des zweiten Beweises ist es also, dass er mit dem Browerschen Fixpunktsatz auskommt und sich nicht auf den Fixpunktsatz von Kakutani stützt. Letzterer ist ein stärkeres mathematisches Instrument, in dessen Beweis unter anderem der Brouwersche Fixpunktsatz eingeht. Ein weiterer Vorzug des zweiten Beweises ist seine Eleganz: Auf der Menge der gemischten Strategieprofile eines endlichen Spiels lässt sich eine Funktion konstruieren, auf die der Brouwersche Fixpunktsatz anwendbar ist und von der sich mit elementaren Mitteln zeigen lässt, dass ihre Fixpunkte Nash-Gleichgewichte sind.

In diesem Aufsatz wird zunächst der Begriffsapparat, den Nash in *Non-cooperative Games* entwickelt, in leicht systematisierter Form wiedergegben. Daraufhin wird auf den Brouwerschen Fixpunktsatz eingegangen. Dieser wird in Nashs Beweis in sehr allgemeiner Form verwendet, nämlich für stetige Funktionen auf nichtleeren, konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Es wird gezeigt, wie sich diese allgemeinere Form aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz für glatte Funktionen auf abgeschlossenen n-dimensionalen Scheiben ergibt. Im letzten Teil des Aufsatzes wird schließlich Nashs zweiter Beweis des Existenzsatzes präsentiert. Mit dem entwickelten Begriffsapparat und der allgemeinen Form des Brouwerschen Fixpunktsatzes lässt sich schnell und elegant zeigen, dass jedes endliche Spiel ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt.

Der vorliegende Aufsatz versucht also einerseits Nashs Argumentation in einer besser zugägnlichen Weise wiederzugeben. Andererseits soll er den differentialtopologischen Hintergrund von Nashs Beweis offen legen und den Zusammenhang zwischen der mathematischen Modellierung von Spielen und der Anwendbarkeit des Brouwerschen Fixpunktsatzes stärker herausarbeiten. Er kann deshalb auch als Ergänzung und Verständnishilfe zu Nashs Aufsatz *Non-cooperative Games* herangezogen werden.

1 Nashs Modellierung von Spielen

Die hier vorgestellte Modellierung von Spielen ist eine Synthese aus Nashs Konzeption (vgl. Nash (1951), S.286f) und heute gängiger Konzeptionen. Beide liegen allerdings ohnehin nicht weit auseinander.

$\boxed{\text{Definition}}$ Ein endliches (n-Personen) Spiel ist ein Tripel $(I, (R_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, wobei:

- $I = \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$ die Menge der Spieler repräsentiert.
- Für alle $i \in I$ ist $R_i = \{r_i^1, \cdots, r_i^{m_i}\}$ die (endliche) Menge der reinen Strategien des i-ten Spielers. Die reinen Strategien des i-ten Spielers werden als Standarteinheitsvektoren im $\mathbb{R}^{m_i}$ aufgefaßt. Die Menge der reinen Strategieprofile ist: $R := R_1 \times \cdots \times R_n$ (das kartesische Produkt der Strategien der einzelnen Spieler)

[1] Selbstverständlich spricht Nash nicht von “Nash-Gleichgewichten”; seine Bezeichnung ist “Gleichgewichtspunkt”.

- Jedem Spieler ist eine Auszahlungsfunktion $u_i : R \to \mathbb{R}$ zugeordnet.

Neben den reinen Strategien können auch gemischte Strategien verfolgt werden. Bei diesen werden die reinen Strategien mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten gewählt. Die Menge der gemischten Strategien des i-ten Spielers ist:

$$S_i := \{\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k r_i^k : \sum_{k=1}^{m_i} p_i^k = 1 \wedge \forall 1 \leq k \leq m_i : p_i^k \geq 0\}$$

Die gemischten Strategien des i-ten Spielers bilden also ein $(m_i - 1)$-dimensionales Simplex im $\mathbb{R}^{m_i}$.
Die Menge der gemischten Strategieprofile ist: $S := S_1 \times \cdots \times S_n$ $(\subset \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n})$
Die eindeutige multilineare Fortsetzung von u_i auf S wird ebenfalls mit u_i bezeichnet: $u_i : S \to \mathbb{R}$

2 Der Begriff des Nash-Gleichgewichts

Es wird nun dargestellt, wie Nash den Begriff des Nash-Gleichgewichts einführt (vgl. Nash (1951), S.287).
Wir verwenden folgende Notation für die Substitution:
Ist $s = (s_1, \cdots, s_n)$, so steht $(s; t_i)$ für $(s_1, \cdots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \cdots, s_n)$.

$\boxed{\text{Definition}}$ Ein Strategieprofil $s \in S$ ist ein Nash-Gleichgewicht $:\Leftrightarrow \forall i \in I : u_i(s) = \max_{t_i \in S_i}[u_i(s; t_i)]$.

Ein Nash-Gleichgewicht ist also ein Strategieprofil, bei dem keiner der Spieler bei gleichbleibenden Strategien der anderen Spieler seine Auszahlung durch Veränderung seiner Strategie verbessern kann.

Aus der Linearität von u_i folgt $\max_{s_i \in S_i}[u_i(s; s_i)] = \max_{1 \leq k \leq m_i}[u_i(s; r_i^k)]$. Damit ergibt sich das folgende notwendige und hinreichende Kriterium für ein Nash-Gleichgewicht:

$$(K) \quad \forall i \in I : u_i(s) = \max_{1 \leq k \leq m_i}[u_i(s; r_i^k)]$$

3 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Der Beweis des Existenzsatzes von Nash beruht auf dem Brouwerschen Fixpunktsatz und zwar in der folgenden Form:

> $\boxed{\textbf{BFS}}$ **Sei $f : X \to X$ stetig und $X \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt, dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.**

Häufig findet man den Brouwerschen Fixpunktsatz in der folgenden schwächeren Form:

> $\boxed{\textbf{BFS*}}$ **Sei $f : D^n \to D^n$ glatt, dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt.**
> (D^n bezeichnet die abgeschlossene n-dimensionale Scheibe)

BFS* wird nun in zwei Schritten zu BFS verallgemeinert (vgl. Milnor, S.14f und Bredon, S.56f).

1. Zunächst zeigen wir durch Widerspruch, dass sogar jede stetige Funktion $f : D^n \to D^n$ mindestens einen Fixpunkt besitzt.
   Sei $f : D^n \to D^n$ eine bel. stetige Abbildung ohne Fixpunkt. Dann gilt: $\mu := \min\{\|x - f(x)\| : x \in D^n\} > 0$
   Da $D^n \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstraß [2] eine Polynomfunktion $g^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $\forall x \in D^n \; \|g^*(x) - f(x)\| < \epsilon := \frac{1}{2}\mu$. Wir definierten nun: $g(x) := g^*(x)/(1+\epsilon)$. Offensichtlich bildet g D^n auf D^n ab und $\forall x \in D^n$ gilt $\|g(x) - f(x)\| < 2\epsilon = \mu$[3].
   Daher gilt $\forall x \in D^n : p(x) \neq x$.
   Im Widerspruch zu BFS* ist g also eine glatte Abbildung von D^n nach D^n ohne Fixpunkt. f besitzt also einen Fixpunkt.

[2] Approximationssatz von Weierstaß: Zu jeder stetigen Funktion f auf einem Kompaktum $K \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge von Polynomen, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

[3] Dies folgt mit der Dreiecksungleichung aus: $\|g(x) - g^*(x)\| = \|\frac{g^*(x)}{1+\epsilon} - g^*(x)\| = \frac{1}{1+\epsilon}\| - \epsilon g^*(x)\| \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}(1+\epsilon) = \epsilon$.

2. Wir zeigen nun, dass eine stetige Funktion $f : X \to X$ auch dann mindestens einen Fixpunkt besitzt, wenn $X \subset \mathbb{R}$ nicht D^n sondern eine beliebige nichtleere, konvexe, kompakte Menge ist. Um dies zu zeigen verwenden und beweisen wir:

   $\boxed{\text{HS}}$ Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt, dann ist C homöomorph zu D^m mit $m \leq n$.

   Beweis:

   $\boxed{\text{Lemma 1}}$ Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen mit $0 \in C \setminus \delta C$, dann schneidet jeder Strahl der vom Ursprung ausgeht δC höchstens in einem Punkt.
   Beweis:
   Angenommen, S sei ein Strahl, der von 0 ausgeht und $\{p, q\} \subset S \cap \delta C$, wobei q weiter von 0 entfernt ist als p. Da $0 \in C \setminus \delta C$ existiert eine Kugel $B \subset C$ um 0. Die Vereinigung aller Verbindungslinien von Punkten aus B nach q sei mit K bezeichnet. Weil $B \subset C$, $q \in C$ (da $q \in C \setminus \delta C$ und C abgeschlossen) und C konvex ist, gilt: $K \subset C$; außerdem ist $p \in K \setminus \delta K$; folglich: $p \in C \setminus \delta C$. Das ist ein Widerspruch zu p $\in \delta C$. S und δC haben also höchstens einen Schnittpunkt.

   $\boxed{\text{Lemma 2}}$ Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex mit $0 \in C \setminus \delta C$, dann ist $f : \delta C \to S^{n-1}$; $f(x) = x/|x|$ ein Homöomorphismus.
   Beweis:
   f ist stetig [4]. f ist offensichtlich surjektiv und nach Lemma 1 injektiv. Als stetige und bijektive Abbildung der kompakten Menge δC in den Hausdorff-Raum S^{n-1} ist f ein Homöomorphismus [5].

   Mit Hilfe von Lemma 2 können wir nun HS beweisen:
   Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt; o.B.d.A. (Translation) ist $0 \in C$. C ist dann homöomorph zu einer konvexen, kompakten Menge $C' \subset \mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$ mit nichtleerem Inneren[6].
   Sei nun $f : \delta C' \to S^{m-1}$; $f(x) = x/|x|$ wie in Lemma 2. Betrachte die Funktion $k : D^m \to C'$ mit $k(x) = \|x\| f^{-1}(\frac{x}{\|x\|})$ für $x \neq 0$ und $k(x) = 0$ sonst. k ist wegen Lemma 2 bijektiv und in allen $x \neq 0$ stetig. Da C' kompakt ist, gilt: $\exists M \in \mathbb{R}(\max_{x \in C'} \|x\| \leq M) \Rightarrow \forall x \in D^m : f^{-1}(\frac{x}{\|x\|}) \leq M \Rightarrow \forall x \in D^m : \|k(x)\| \leq \|x\| \cdot M \Rightarrow$ k in 0 stetig. k ist also ein Homöomorphismus, also D^m homöomorph zu C' und somit auch zu C. □

   Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt, sowie $f : X \to X$ stetig. Dann existiert nach HS ein Homöomorphismus $H : D^m \to X$ mit $m \leq n$. Nach BFS* existiert ein $x \in D^m$ mit $(H^{-1} \circ f \circ H)(x) = x$. Folglich ist $H(x) \in X$ Fixpunkt von f.

4 Der Existenzsatz von Nash

$\boxed{\exists\text{-Satz von Nash}}$ Jedes endliche Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis:

- Wir konstruieren zunächst eine Funktion $T : S \to S$, wozu wir zunächst definieren:

$$\phi_i^k(s) := \max(0, u_i(s; r_i^k) - u_i(s))$$

[4]Denn $f = r \circ i$ mit $i : \delta C \hookrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to S^{n-1}$.

[5]Satz: Ist X kompakt, Y Hausdorff und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, dann ist f ein Homöomorphismus. Beweis: Zu zeigen ist, dass $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen unter f^{-1} sind abgeschlossen $\Leftrightarrow$ f bildet abgeschlossene Mengen auf ebensolche ab: Sei $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt (wg. X kompakt) und folglich (wg. f stetig und X kompakt) auch $f(A)$ kompakt und daher (wg. Y Hausdorff) $f(A)$ abgeschlossen.

[6]Sei $m \in \mathbb{N}$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Punkte in C. Da $C \in \mathbb{R}^n$, ist $m \leq n$. Sei B eine Menge von m linear unabhängigen Punkten aus C. Definiere nun eine lineare Abbildung $h : C \to \mathbb{R}^m$, die die Elemente aus B auf die Standarteinheitsvektoren aus $\mathbb{R}^m$ abbildet. Bezeichne C' das Bild der Abbildung, dann ist C' konvex, kompakt und hat nichtleeres Inneres; außerdem ist $h : C \to C'$ ein Homöomorphismus.

Damit können wir die Komponenten von $T : S \to S$ definieren:

$$T_i(s) := \frac{s_i + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_i^k(s) r_i^k}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_i^k(s)}$$

- S ist als kartesisches Produkt der Simplices S_i nichtleer, konvex und kompakt, außerdem ist T stetig. Somit besitzt T nach BFS mindestens einen Fixpunkt.
- Zu zeigen ist also noch, dass Fixpunkte von T Nash-Gleichgewichte sind:
  Sei $s = (\sum_{k=1}^{m_1} p_1^k r_1^k, \cdots, \sum_{k=1}^{m_n} p_n^k r_n^k) \in S$ ein Fixpunkt von T.
  Dann gilt $\forall i \in I$:

  $\exists\ 1 \leq l \leq m_i : p_i^l > 0 \wedge u_i(s; r_i^l) \leq u_i(s)$, denn unter den reinen Strategien r_i^k die an s_i beteiligt sind, gibt es eine, die höchstens so profitabel ist, wie jede andere.
  $\Rightarrow \phi_i^l(s) = 0$
  Nach unserer Annahme bleibt s unter T fix; insbesondere darf also der Anteil von r_i^l an s_i unter T nicht abnehmen; dazu muss wegen $\phi_i^l(s) = 0$ der Nenner von $T_i(s)$, also $1 + \sum_{k=1}^{m_i} \phi_i^k(s)$, gleich 1 sein.
  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{m_i} \phi_i^k(s) = 0$
  $\Rightarrow \forall k \in m_i : \max(0, u_i(s; r_i^k) - u_i(s)) = 0$
  $\Rightarrow u_i(s) = \max_{k \in m_i}[u_i(s; r_i^k)]$

  Da dies für alle $i \in I$ gilt erhalten wir unser obiges Kriterium für ein Nash-Gleichgewicht:
  $(K) \quad \forall i \in I : u_i(s) = \max_{1 \leq k \leq m_i}[u_i(s; r_i^k)]$ $\square$

5 Literatur

Bredon, Glen E.: Topology and Geometry. GTM 139, Springer, 1993.
Milnor, John W.: Topology from the Differentiable Viewpoint. University Press of Virginia, 1965.
Nash, John: Equilibrium Points in N-Person Games. In: Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 1950, 48-9.
Nash, John: Non-cooperative Games. In: Annals of Mathematics, 54 (2), 1951, 286-95.