

Mathematisch beweisbare dominante Pokerstrategien

Projekt zur Vorlesung „Spieltheorie“, WS 2008/09,
Prof. Schottenloher

Projektteam:

Bauer, Janis
Freudenstein, Maria
Jäcklein, Alexander
Kulesa, Alexander

Vortrag am 27.01.2009, 16.30 Uhr

Gliederung

1. Vorwort
2. Spielregeln
3. Preflop-Spiel
4. Postflop-Spiel
5. Beispiel: Reduktion der gegnerischen Handrange
6. Glossar

1 Vorwort

Dieser Artikel behandelt die Pokervariante Texas Hold'em Fixed Limit, die in den letzten Jahren in Deutschland einen regelrechten Boom erlebte. Es handelt sich wie bei jeder Pokervariante um ein Glücksspiel und dieser Charakter sollte stets im Hinterkopf behalten werden, wenn man sich mit dem Spiel auseinandersetzt.

Zusätzlich ist Poker ein Spiel mit unvollständiger Information und um diesem beizukommen wird anhand von dominanten Strategien das rationale Spielverhalten konstruiert, das im Abschluss restriktiv die Hand eines rationalen Gegners eingrenzen soll.

Da Poker aus dem englischsprachigen Raum stammt, sind viele Fachbegriffe im Englischen gehalten, die zum Teil zwar passende Übersetzungen hätten, aber konventionell im Original belassen bzw. eingedeutscht werden. So wird das Wort „call“ für „mitgehen“ zum eingedeutschten regelmäßigen Verb „callen“, das schließlich normal konjugiert werden kann.

2 Spielregeln

2.1 Allgemeines

Spieleranzahl: 3-6 Spieler (Short handed)

Gewinner des Spiels ist der Spieler, aus dessen zwei Karten mit den 5 fünf Gemeinschaftskarten (im Folgenden: **Community Cards**) sich die beste **Hand** von 5 Karten ergibt, oder der letzte im Spiel verbleibende Spieler.

Der ausgeschüttete Gewinn ist der **Pot** und ergibt sich aus den in den vier Runden gesetzten Einsätzen. Bei mehreren gleich guten Händen wird der Pot geteilt.

2.2 Spielverlauf

Die Karten werden vom Dealer (bez: Button = BU) im Uhrzeigersinn (beginnend links vom Dealer), ausgeteilt:

- 2 verdeckte Karten pro Spieler
- Preflop: Setzrunde 1
- Flop: 3 Community Cards werden aufgedeckt
- Setzrunde 2
- Turn: 1 Community Card werden aufgedeckt
- Setzrunde 3
- River: Die letzte Community Card wird aufgedeckt
- Setzrunde 4

Die **Setzrunden** erfolgen ebenfalls beginnend links vom Dealer im Uhrzeigersinn. In der Preflop-Setzrunde haben der erste Spieler (Small Blind = SB) mit einem Einsatz von $\frac{a}{2}$ und der zweite Spieler (Big Blind = BB) mit a festgelegte erste Züge.

Jeder Spieler kann in jeder Setzrunde aussteigen (**fold** [*engl.*] - aussteigen) Die Setzrunde endet, wenn entweder alle Spieler bis auf einen gefoldet haben, oder alle im Spiel verbliebenen Spieler denselben Betrag gesetzt haben. Mindestsetzbetrag ist in Runde 1 und 2 jeweils a , in Runde 3 und 4 (ab Turn) $2a$; Höchstbetrag $4a$ bzw. $8a$ (Fixed limit)

2.3 Gewinnreihenfolge der Hände

- (7) Straight Flush: 5 aufeinanderfolgende Karten der gleichen Farbe
- (6) Vierling: Vier gleiche Karten (z.B. vier Asse)
- (5) Full House: Drei gleiche Karten und zwei andere, ebenfalls gleiche Karten
- (4) Flush: 5 Karten derselben Farbe

- (3) Straße: 5 aufeinanderfolgende Karten
- (2) 2 Paare: 2 mal jeweils 2 gleiche Karten
- (1) Paar: 2 gleiche Karten
- (0) High Card: Die höchste Karte

Ein Straight Flush ist somit die stärkste und eine einfache High-Card die schwächste Gruppe. Bei mehreren Händen derselben Gruppen gewinnt die Höhere, d.h die Hand mit der höchsten Karte, bei Gleichheit entscheidet die Zweithöchste usw.

2.4 Definition (Kartenwerte)

Der **Kartenwert** ist eine natürliche Zahl, die jeder Karte nach folgendem Prinzip zugeordnet wird:

A = 14, K = 13, Q = 12, J = 11, 10 = 10, ... , 2 = 2

Alle Farben sind gleich viel wert; z.B. A♥ = A♦ = 14

2.5 Definition (Wert einer Hand)

Der **Wert einer Hand** wird über eine (Regeln-)Abbildung $W: \Omega^n \rightarrow \mathbb{N}$ der vorhandenen Karten auf eine 11-stellige natürliche Zahl mit folgender Stellenbelegung (von links nach rechts) ausgedrückt:

- Gewinngruppe (z.B. Flush, Paar, etc.) einstellig,
- Karten, die zur Gruppenzuordnung notwendig sind absteigend nach Wert geordnet; jeweils zweistellig
- Karten, die nicht zur Gruppenzuordnung notwendig sind absteigend nach Wert geordnet; jeweils zweistellig
- Damit kann jeder Hand ein eindeutiger Wert zugeordnet werden.

2.6 Definition (beste Hand)

Eine **bessere Hand** ist eine Hand, deren Wert größer als der Wert einer anderen Hand ist.

Die **beste Hand** ist die real erzielte Hand, deren Wert größer gleich aller anderen Hände ist.

Die **bestmögliche Hand = Nuts** ist die (gegeben die jeweils aufliegenden Community Cards) beste theoretisch mögliche Hand.

2.7 Beispiele

- Highcard: (A,K,J,9,2) : 0 14 13 11 09 02 = 1.413.110.902 und (A,K,J,9,4) : 0 14 13 11 09 04 = 1.413.110.904 (> 1.413.110.902, d.h. die erste Hand ist besser als die zweite)
- 2 Paare (Q,Q,6,6,K) : 2 12 12 06 06 13 = 21.212.060.613
- Flush (K,Q,J,8,4) : 3 13 12 11 08 04 = 31.312.110.804

2.8 Bemerkung

Die Zuordnung eines Zahlenwerts zu einer Hand ermöglicht eine mathematische Handhabung der Gewinnfrage. Wegen der Praxisferne dieser Festlegung werden wir in der Folge aber auf eine explizite Darstellung des Wertes einer Hand verzichten; alle Aussagen über die Wertigkeit der Hände könnten jedoch mit diesem Prinzip auf ihre mathematische Korrektheit überprüft werden.

2.9 Definition (Kartenraum)

$\Omega := \{A♥, \dots, 2♦\}$, Preflop: $\Omega \rightarrow (x, y), x, y \in \Omega$

$\Omega^F := \Omega \setminus (x, y)$, Flop: $\Omega \rightarrow (f_1, f_2, f_3) = F$

$\Omega^T := \Omega^F \setminus (f_1, f_2, f_3)$, Turn: $\Omega^F \rightarrow T$

$\Omega^R := \Omega^T \setminus (T)$, River: $\Omega^T \rightarrow R$

$\Omega^n := \Omega \times \Omega \setminus (x_{SB}, y_{BB}) \times \dots \times \Omega \setminus (x_{CO}, y_{CO}) \times \Omega^F \times \Omega^T \times \Omega^R$

2.10 Mögliche Einsatzbeträge

Preflop, Flop: call: a, raise: 2a, 3-bet (reraise): 3a, cap (rereraise): 4a

Turn, River: call: 2a, raise: 4a, 3-bet: 6a, cap: 8a

3 Preflop-Spiel

Hero sitzt im CO und hält $A\heartsuit 6\heartsuit$.
MP2 folds, MP3 folds, Hero ???

3.1 Preflop-Charts

Die Preflop-Strategie lässt sich aufgrund der überschaubaren Anzahl der möglichen Starthände (13 Pairs + 78 Suited Hands + 78 Offsuited Hands = 169) in Tabellen darstellen und eine dieser Tabellen, das **Open-Raising-Chart (ORC)**, soll im Folgenden betrachtet werden.

3.1.1 Definition (Equity)

Sei Ω^n ein Kartenraum. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $E_i : \Omega^n \rightarrow [0, 1], i \in P$ nennt man die **Equity** des i -ten Spielers. $E_i(\omega)$ gibt die Gewinnwahrscheinlichkeit des i -ten Spielers gegeben der Kartenkombination $\omega \in \Omega^n$ an. Von einem Equity-Vorteil eines Spielers spricht man, wenn: $E_i(\omega) > \frac{1}{N}$, wobei N die Anzahl der verbliebenen Spieler bezeichnet.

3.1.2 Bemerkung und Beispiel - Der Equilator

Um die Equity zu berechnen wird in der Praxis Software eingesetzt, die durch Simulationen von vielen Spielen die Equity annähert. Eine solche Software ist der pokerstrategy.com Equilator, der für die späteren Simulationen von jeweils 15 Millionen Spielen anhand der Monte-Carlo-Methode genutzt wurde, z.B.

Hero sitzt im CO und hält $A\heartsuit 6\heartsuit$, der BB hält $7\clubsuit 2\diamondsuit$, alle anderen Spieler sind ausgestiegen.

$E_{CO}(-, 7\clubsuit 2\diamondsuit, -, -, A\heartsuit 6\heartsuit, -) = 66,529\%$, $E_{BB}(-, 7\clubsuit 2\diamondsuit, -, -, A\heartsuit 6\heartsuit, -) = 33,471\%$

Der Flop ist $A\spadesuit 7\heartsuit 2\heartsuit$.

$E_{CO}(-, 7\clubsuit 2\diamondsuit, -, -, A\heartsuit 6\heartsuit, -, A\spadesuit 7\heartsuit 2\heartsuit) = 50,897\%$, $E_{BB}(-, 7\clubsuit 2\diamondsuit, -, -, A\heartsuit 6\heartsuit, -, A\spadesuit 7\heartsuit 2\heartsuit) = 49,103\%$

3.1.3 Definition (first-in und Open-Raise)

Ist der ziehende Spieler **first-in**, d.h. sind alle Spieler, die bisher am Zug waren, ausgestiegen oder sitzt der ziehende Spieler im MP2, so nennt man ein Raise von diesem **Open-Raise**.

3.1.4 Bemerkung

Der BB kann nach Definition also nicht open-raisen.

3.1.5 Idee des ORC

Offensichtlich ist das Spielen von Starthänden mit einem Equity-Vorteil dominant. Die Equity einer Starthand lässt sich aber nur genau bestimmen, wenn man die exakten Karten des Gegners miteinbezieht, was aufgrund der unvollständigen Information im Spiel nicht möglich ist. Gerade wenn der ziehende Spieler first-in ist, hat er über die Starthände der nach ihm ziehenden Spieler überhaupt keine Information.

Ein Ansatz, diesem Problem zu begegnen, ist die Errechnung der Equity der eigenen Starthand verglichen mit gleichverteilten zufälligen Händen der möglichen Gegner hinter ihr. Ergibt sich ein Equity-Vorteil, so wird die Hand geraist, da der Equity-Vorteil größtmöglich ausgenutzt werden sollte, ansonsten wird die Starthand gefoldet. Man spricht von raise or fold.

Zurück zum Einstiegsbeispiel, hinter Hero mit $A\heartsuit 6\heartsuit$ im CO, der first-in ist, sitzen noch drei potentielle Gegner:

$E_{CO}(\text{random hand, random hand, -, -, } A\heartsuit 6\heartsuit, \text{random hand}) = 31,281\% > 25\% = \frac{1}{4}$.

Somit sollte Hero open-raisen, da er um 6,281% über der Durchschnittsequity liegt.

3.1.6 Berechnung des ORC mit Hilfe des Equilators

Auf diese Weise lässt sich nun für jede Starthand von jeder Position die Equity berechnen und es ergeben sich folgende Tabellen, in denen ein Equity-Vorteil durch grüne Felder sowie ein -Nachteil durch rote Felder gekennzeichnet wurde:

Pairs	AA	KK	QQ	JJ	TT	99	88	77	66	55	44	33	22
MP2	49,21%	42,95%	37,90%	33,54%	29,92%	26,63%	24,05%	21,83%	20,07%	18,53%	17,27%	16,25%	15,53%
MP3	55,85%										20,59%	19,01%	17,73%
CO	63,83%										26,29%	23,97%	21,94%
BU	73,44%										36,76%	33,62%	30,67%
SB	85,18%										53,70%	50,34%	

Suited	AK	AQ	AJ	AT	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2
MP2	31,06%	29,31%	27,88%	26,71%	24,13%	23,24%	22,39%	21,60%	22,19%	21,68%	21,20%	20,61%
MP3	35,41%											24,06%
CO	41,43%											29,45%
BU	50,71%											38,78%
SB	76,05%											57,38%

Suited	KQ	KJ	KT	K9	K8	K7	K6	K5	K4	K3	K2
MP2	28,34%	26,96%	25,81%	23,24%	21,37%	20,68%	20,01%	19,48%	19,00%	18,59%	18,21%
MP3	32,46%										21,34%
CO	38,19%										26,22%
BU	47,08%										34,90%
SB	63,40%										53,23%

Suited	QJ	QT	Q9	Q8	Q7	Q6	Q5	Q4	Q3	Q2
MP2	26,24%	25,14%	22,60%	20,74%	19,06%	18,53%	18,02%	17,57%	17,16%	16,77%
MP3								20,73%	20,19%	19,72%
CO								25,55%	24,90%	24,27%
BU								34,01%	33,21%	32,42%
SB								51,85%	51,01%	50,18%

Suited	JT	J9	J8	J7	J6	J5	J4	J3	J2
MP2	24,86%	22,35%	20,53%	18,83%	17,31%	16,90%	16,46%	16,07%	15,70%
MP3					20,49%	19,99%	19,45%		
CO					25,22%	24,67%	23,99%		
BU					33,37%	32,75%	31,91%		
SB					50,62%	50,00%	49,09%		

Suited	T9	T8	T7	T6	T5	T4	T3	T2
MP2	22,39%	20,57%	18,88%	17,32%	15,96%	15,58%	15,22%	14,85%
MP3			22,14%	20,40%	18,86%			
CO			26,89%	25,00%	23,25%			
BU			34,64%	32,70%	30,78%			
SB			50,63%	48,95%	47,20%			

Suited	54	53	52
MP2	16,47%	15,33%	14,025
MP3	18,92%		
CO	22,69%		
BU	29,03%		
SB	41,46%		

Suited	65	64	63	62
MP2	17,03%	15,86%	14,57%	13,26%
MP3	19,69%	18,34%		
CO	23,71%	22,15%		
BU	30,27%	28,50%		
SB	43,87%	41,34%		

Suited	76	75	74	73	72
MP2	17,88%	16,70%	15,35%	13,99%	12,81%
MP3	20,78%	19,39%	17,88%		
CO	25,05%	23,45%	21,79%		
BU	34,05%	30,13%	28,25%		
SB	45,35%	43,67%	41,84%		

Suited	87	86	85	84	83	82
MP2	18,97%	17,66%	16,27%	14,88%	13,63%	13,33%
MP3	22,08%	20,58%	19,02%			
CO	26,64%	24,94%	23,19%			
BU	33,80%	31,96%	30,08%			
SB	47,94%	46,27%	44,56%			

Suited	98	97	96	95	94	93	92
MP2	20,27%	18,85%	17,35%	15,91%	14,61%	14,28%	13,93%
MP3	23,65%	22,00%	20,36%	18,77%			
CO	28,27%	26,65%	24,82%	23,04%			
BU	36,00%	34,07%	32,14%	30,25%			
SB	50,82%	49,10%	47,45%	45,73%			

	AK	AQ	AJ	AT	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2
MP2	27,84%	25,91%	24,33%	23,03%	20,23%	19,25%	18,30%	17,44%	18,06%	17,46%	16,92%	16,28%
MP3											20,62%	19,88%
CO											26,31%	25,48%
BU											36,25%	35,26%
SB											55,84%	54,96%

	KQ	KJ	KT	K9	K8	K7	K6	K5	K4	K3	K2
MP2	25,03%	23,49%	22,24%	19,43%	17,40%	16,60%	15,88%	15,30%	14,75%	14,28%	13,85%
MP3						20,43%	19,59%	18,86%	18,22%	17,62%	17,04%
CO						26,20%	25,24%	24,38%	23,58%	22,82%	22,09%
BU						35,98%	34,90%	33,92%	32,99%	32,08%	31,21%
SB						55,19%	54,22%	53,32%	52,35%	51,42%	50,54%

	QJ	QT	Q9	Q8	Q7	Q6	Q5	Q4	Q3	Q2
MP2	22,86%	21,68%	18,89%	16,84%	15,03%	14,43%	13,86%	13,34%	12,89%	12,48%
MP3				20,60%	18,56%					
CO				26,12%	23,92%					
BU				35,30%	33,06%	32,25%	31,31%	30,39%		
SB				53,62%	51,76%	51,01%	50,12%	49,13%		

	JT	J9	J8	J7	J6	J5	J4	J3	J2
MP2	21,47%	18,75%	16,74%	14,88%	13,25%	12,76%	12,28%	11,84%	11,43%
MP3			20,32%	18,30%					
CO			25,58%	23,38%					
BU			34,14%	31,94%					
SB			51,51%	49,70%					

	T9	T8	T7	T6	T5	T4	T3	T2
MP2	18,88%	16,91%	15,07%	13,36%	11,89%	11,45%	11,04%	10,62%
MP3		20,37%	18,36%					
CO		25,39%	23,23%					
BU		33,45%	31,25%					
SB	51,53%	49,72%	47,89%					

	87	86	85	84	83	82
MP2	15,26%	13,83%	12,34%	10,85%	9,48%	9,15%
MP3	18,43%					
CO	23,07%					
BU	30,43%					
SB	45,07%					

	98	97	96	95	94	93	92
MP2	16,64%	15,07%	13,45%	11,91%	10,47%	10,11%	9,72%
MP3	20,07%	18,31%					
CO	25,00%	23,04%					
BU	32,72%	30,65%					
SB	48,12%	46,29%					

Open-Raising-Chart nach Equilator

	MP2	MP3	CO	BU	SB
Pairs	44	44	44	33	22
Suited	A2	A2	A2	A2	A2
	K2	K2	K2	K2	K2
	Q2	Q3	Q4	Q4	Q2
	J5	J4	J4	J4	J5
	T6	T6	T6	T7	T7
	96	97	97	97	98
	86	86	87	87	
	75	76	76	76	
	65				
Offsuited	A3	A3	A2	A2	A2
	K8	K7	K6	K5	K2
	Q8	Q8	Q8	Q8	Q5
	J8	J8	J8	J8	J8
	T8	T8	T8	T8	T9
	98	98	98		

Open-Raising-Chart nach pokerstrategy.com

	MP2	MP3	CO	BU	SB
Pairs	66	55	44	33	22
Suited	A8	A6	A2	A2	A2
	KT	K9	K8	K2	K2
	QT	Q9	Q8	Q6	Q2
	JT	J9	J8	J7	J2
		T9	T9	T8	T3
			98	98	94
				87	85
				76	76
Offsuited	AT	A9	A7	A2	A2
	KJ	KJ	KT	K7	K3
		QJ	QT	Q9	Q4
			JT	J9	J5
					T6
					97
					87

zugehörige Equilator-Daten

	MP2	MP3	CO	BU	SB
Pairs	20,07%	22,44%	26,29%	33,62%	50,36%
Suited	23,22%	25,45%	29,44%	38,78%	57,39%
	25,81%	27,18%	30,77%	34,89%	53,23%
	25,15%	26,39%	29,73%	35,72%	50,17%
	24,86%	26,01%	29,13%	35,35%	47,41%
		25,96%	30,97%	36,69%	45,69%
			28,47%	35,98%	43,88%
				33,80%	44,57%
				31,91%	45,35%
Offsuited	23,02%	24,58%	28,75%	35,27%	54,92%
	23,49%	27,72%	32,40%	35,98%	51,43%
		26,90%	31,31%	37,55%	49,14%
			30,70%	36,38%	47,20%
					46,08%
					46,29%
					45,07%

3.1.7 Bemerkung (Problem des ORC auf Grundlage des Equilators)

Die durchgeführten Berechnungen basieren auf der Annahme, dass jeder mögliche Gegner hinter der eigenen Position unabhängig von unserem Zug mit jeder zufälligen Hand stets im Spiel bleibt. Dies ist in der Praxis selbstverständlich nicht der Fall und ein Spiel nach dem soeben aufgestelltem ORC wäre leicht auszuhebeln:

Hero sitzt im CO und hält A♥T♥. MP3 spiele nach dem Equilator-ORC.
MP2 folds, MP3 raises, Hero ???

3.1.8 Definition (Handrange)

Sei Ω^n ein Kartenraum und H die Historie. Die Abbildung $R_i : H \rightarrow R \subseteq \Omega^n, i \in P$ nennt man die **Handrange** des i -ten Spielers. Die Teilmenge R (ebenfalls bezeichnet als Handrange) enthält die verbliebenen plausiblen Hände gegeben durch die Historie.

3.1.9 3-Bet vs. Equilator-ORC

Analog zur Berechnung der Equity einer first-in Starthand erfolgt die Equity-Berechnung einer Starthand, gegeben dass Spieler vor dem Hero im Spiel sind. Nun muss der Equity-Vorteil eben nicht nur gegen zufällige Hände hinter einem bestehen, sondern gleichzeitig auch gegen die Handrange der Gegner vor einem im Spiel.

Die Handrange der Spieler, die strikt nach dem gegebenen ORC spielen, kann man also aus dem ORC direkt ablesen und für das Beispiel folgt:

$$E_{MP3}(\text{random hand, random hand, -, } R_{MP3}(H), A♥T♥, \text{random hand}) = 28,732\% >$$

$$> E_{CO}(\text{random hand, random hand, -, } R_{MP3}(H), A♥T♥, \text{random hand}) = 20,906\% > 20\% = \frac{1}{5},$$

wobei $R_{MP3}(H) = \{44+, A2s+, K2s+, Q3s+, J4s+, T6s+, 97s+, 86s+, 76s, A3o+, K8o+, Q8o+, J8o+, T8o+\}$.

Somit sollte Hero 3-beten, da er sowohl über der Equity von MP3 als auch über der Durchschnittsequity liegt. MP3 dagegen würde sich einem Equity-Nachteil ausgesetzt sehen, obwohl er nach dem Equilator-ORC spielt!

3.1.10 Lösungsansatz 1: Eingrenzung der Equity-Nachteils-Wahrscheinlichkeit

Sei Ω^n ein Kartenraum und $R_\omega \subset \Omega^n$ die größte Handrange gegeben $\omega \in \Omega^n$ für die gilt:

$$E_{BB}(\omega, \omega_R \in R_\omega, -, -, -, -) > 50\%, \text{ d.h. die Handrange, die gegen } \omega \text{ einen Equity-Vorteil hat.}$$

Sei $p \in [0, 1]$. Man liste nun nur noch die Starthände $\omega \in \Omega$ im ORC, die im Equilator ORC stehen und für die gilt: $P(\text{ein Spieler hinter Hero hält eine Starthand aus } R_\omega) < p$.

3.1.11 Beispiel und Bemerkung

Sitze Hero first-in im CO und halte $\omega_{CO} = A♥K♥$, dann ist $R_\omega = \{22+\}$ und

$$P(\omega_{BU} \in R_\omega \wedge \omega_{SB} \in R_\omega \wedge \omega_{BB} \in R_\omega) = 1 - (1 - \frac{72}{1325})^3 = 15,4\%. \text{ Für } p > 15,4\% \text{ dürfte also } A♥K♥ \text{ in der CO-Spalte des ORC gelistet sein.}$$

Da p aber willkürlich von jedem Spieler festgelegt werden müsste, je nach Belieben, lässt sich damit kein allgemein gültiges ORC erstellen, sondern höchstens eine Empfehlung.

3.1.12 Lösungsansatz 2: ORC nach Erfahrung

Erfahrung ist in diesem Zusammenhang nicht als Spielerfahrung eines Einzelnen erfolgreichen Spielers zu sehen, sondern als Bezeichnung für die statistische Auswertung der Datenbanken der Pokerportale. Hierzu werden diese mit Analysesoftware eingelesen und anschließend auf Starthände gefiltert die nach einem Open-Raise einen positiven Erwartungswert bezogen auf die Position haben. Da mir diese Datenbanken nicht zur Verfügung stehen, kann ich nur mutmaßen, dass es sich um Datenmengen im Billionenbereich handelt, die schließlich von Firmen wie pokerstrategy.com ausgewertet werden und dann deren ORC ergeben.

Die pokerstrategy-Preflop-Charts sind meiner Meinung nach die besten auf dem Markt und werden als Grundlage für alle folgenden Berechnungen dienen.

3.1.13 3-Bet-Chart, Cap-Chart und Big Blind Defense

Analog zu den Gedanken in 1.1.9 kann man Handranges berechnen, die gegen die durch das ps-ORC gegebenen Starthände Equity-Vorteile besitzen. Diese sind im 3-Bet-Chart notiert und wiederum analog erübrigt sich das Cap-Chart gegen das 3-Bet-Chart.

Das BB-Defense-Chart stellt hierbei einen Spezialfall des 3-Bet-Charts da, der sich aufgrund des verpflichtenden Einsatz von a ergibt. So wird natürlich weiterhin die 3-Bet gezogen, wenn ein Equity-Vorteil besteht, aber andernfalls nicht automatisch gefoldet. Da der Call eines Raises für den BB statt $2a$ nur a kostet, benötigt dieser nur einen Equity von mindestens 25% um mit positivem Erwartungswert spielen zu können, da er a bezahlt um mögliche $3a$ zu gewinnen.

3.1.14 Limper und andere irrationale Spieler

Über die Equity-Theorie wurde gezeigt, dass außer im BB stets die Devise “raise or fold“ gilt. Nichtsdestotrotz tummeln sich Limper und Cold-Caller an den Online-Pokertischen und der Vollständigkeit halber gibt es auch für das Auftreten solcher Fälle die passenden Preflop-Charts. Hierbei werden Limper und Cold-Caller im Wesentlichen wie Spieler hinter einem mit einer zufälligen Hand behandelt bzw. die Einträge gemäß der Datenbankauswertungen gewonnen.

Der Umgang im Preflop-Spiel mit “schlechten“ Gegnern, denn irrationales Verhalten führt in der Regel zu einem schlechteren Spiel, muss in der Praxis von Fall zu Fall entschieden werden und kann nicht allgemein in Charts festgehalten werden und ist somit auch nicht Teil dieser Arbeit.

4 Postflop-Spiel

Hero sitzt im CO und hält $A\heartsuit 6\heartsuit$.

Nur BB spielt noch mit, Flop ist $K\heartsuit 2\heartsuit T\spadesuit$, Hero ???

4.1 Definition (Outs und Odds)

Sei Ω^n ein Kartenraum. Die Zufallsvariable $O_i : \Omega^n \rightarrow \{0, \dots, 50\}$, $i \in P$ nennt man die **Outs** des Spielers. $O_i(\omega)$ gibt die Anzahl der Karten an, die falls sie ins Spiel kommen dafür sorgen, dass der i-te Spieler die beste Hand hält. Die Abbildung $D_i : \{0, \dots, 50\} \rightarrow \{0, \dots, 50\}$, $i \in P$ nennt man **Odds** mit: $D_i(\omega) := \frac{|\Omega \setminus \omega| - O_i(\omega)}{O_i(\omega)}$, $O_i(\omega) \neq 0$

4.2 Beispiel

CO hält $A\heartsuit 6\heartsuit$, BB hält $7\clubsuit 2\spadesuit$, der Flop sei $A\spadesuit 7\heartsuit 2\heartsuit$,

$O_{CO}(\dots) = 14$ (9 mal Herz, 3 mal 6, 2 mal A) $O_{BB}(\dots) = 31$ (der Rest 45-14)

$D_{CO} = \frac{31}{14}$ $D_{BB} = \frac{14}{31}$

4.3 Bemerkung

Für den Fall $O_i(\omega) = 0$ hat der i-te Spieler sicher verloren.

Außer im River da gilt $\forall i: O_i(\omega) := 0$

4.4 Definition (Nuts)

Sei Ω^n ein Kartenraum. Die **bestmögliche Hand** gegeben $\omega \in \Omega^n$ nennt man **Nuts**.

4.5 Definition (Draw)

Sei Ω^n ein Kartenraum. Als Draw bezeichnet man eine Hand, die mehr als 0 Outs hat. Als **Draw** zu einer bestimmten Kategorie bezeichnet man eine Hand, die mehr als 0 Outs zu dieser Kategorie hat.

4.6 Bemerkung (Draw to the Nuts)

Da man beim richtigen Spiel nicht weiß, welche Hand der Gegner hält, kann man seine Outs nicht sicher bestimmen. Deshalb spricht man von Draw to the Nuts, wenn man nur die Outs zählt, welche die Hand zu den Nuts machen.

4.7 Satz (Verhalten beim Drawen)

Sei Ω^n ein Kartenraum, X die Größe des Pots, a sei 1, S die Menge der Strategien.

I) Für den Fall, dass Hero als Letzter in der Setzrunde am Zug ist und gebetet wurde, wird das Verhalten beim Drawen durch folgende Abbildung bestimmt, $f : \Omega^n \rightarrow S$ mit

$$\omega \begin{cases} f \text{ falls } X + 1 < D(\omega) \\ c \text{ falls } \frac{X}{3} + 1 < D(\omega) < X + 1 \\ r/c \text{ falls } \frac{X}{4} + 1 < D(\omega) < \frac{X}{3} + 1 \\ r/ca \text{ falls } D(\omega) < \frac{X}{4} + 1 \end{cases}$$

II) Für den Fall, dass Hero als Erster setzen muss oder vor ihm nur gecheckt wurde und nur ein Gegner mitspielt, gilt für f :

$$\omega \begin{cases} ch/f \text{ falls } X + 1 < D(\omega) \\ ch/c \text{ falls } \frac{X}{2} + 1 < D(\omega) < X + 1 \\ b/c \text{ falls } \frac{X}{4} + 1 < D(\omega) < \frac{X}{2} + 1 \\ b/re \text{ falls } D(\omega) < \frac{X}{4} + 1 \end{cases}$$

III) Für den Fall, dass Hero als Erster setzen muss oder vor ihm nur gecheckt wurde und mehrere Gegner mitspielen, sollte Hero je nach dem Gebotenen oder maximalen zukünftigen Geboten callen, bzw. beten oder raisen falls $D(\omega) < \frac{X}{4} + 1$ andernfalls checken bzw. folden.

4.7.1 Beweis

Eine Strategie ist genau dann sinnvoll, wenn ihr erwarteter Nutzen positiv ist, d.h.

$$E(u(s)) = \text{Gewinn} * \text{Gewinnwahrscheinlichkeit} - \text{Verlust} * \text{Verlustwahrscheinlichkeit} = (\text{Pot} + \text{Einsatz}) * \frac{O(\omega)}{|\Omega^F|} - \text{Einsatz}$$

$$* \frac{|\Omega^F| - O(\omega)}{|\Omega^F|} = (X + E) * \frac{O(\omega)}{47} - E * \frac{47 - O(\omega)}{47} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (X + E) * \frac{O(\omega)}{47} \geq E * \frac{47 - O(\omega)}{47}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X + E}{E} \geq \frac{47 - O(\omega)}{O(\omega)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X}{E} + 1 \geq D(\omega)$$

Da der Einsatz bei einem call 1(a) ist, bei einem bet mit anschließendem call maximal 2, bei einem raise mit anschließendem call maximal 3 (falls Gegner reraist) und bei einem raise mit anschließendem cap 4 sowie maximal 4 bei einem bet mit anschließendem reraise, erhält man durch Einsetzen die Behauptung.

4.7.2 Beispiel (Flushdraw)

Hero sitzt im CO und hält $A\heartsuit 6\heartsuit$.

Nur BB spielt noch mit, Flop ist $K\heartsuit 2\heartsuit T\spadesuit$, Hero ??? Der Pot ist 4,5, da Hero Preflop geraist hat und BB mitgegangen ist. Angenommen BB hat gebetet.

Es gilt, $O(\omega) = 9 \rightarrow D(\omega) = \frac{38}{9} \approx 4,2 \rightarrow \frac{4,5}{3} + 1 < D(\omega) < 4,5 + 1$, d.h. die Strategie c ist sinnvoll.

4.7.3 Beispiel (Straightdraw (Gutshot))

Hero hält $A\heartsuit Q\heartsuit$, der Flop ist $5\heartsuit T\spadesuit J\clubsuit$. Ab welchem Pot ist die Strategie c sinnvoll?

Es gilt, $O(\omega) = 4 \rightarrow D(\omega) = \frac{43}{4} \approx 10,75 \rightarrow D(\omega) < X + 1 \Leftrightarrow X > 9,75$, d.h. die Strategie c ist sinnvoll ab einem Pot von 10.

4.8 Definition und Satz (Auto-Bet)

Am Flop nennt man die bet in einen unraised Pot **Autobet**.

Der Autobet ist unabhängig von den eigenen Karten und am Flop eine dominante Strategie.

4.8.1 Beispiel

Hero im BB $7\heartsuit 2\heartsuit$.

MP2 f, MP3 f, CO calls, Bu f, SB f, Hero checks

Flop: $A\clubsuit 9\spadesuit Q\clubsuit \Rightarrow$ Hero bet.

4.8.2 Beweis

Da bei einem Auto-Bet der Feind sehr untypisch spielt gehen wir für diesen Beweis davon aus, dass er eine zufällige Hand hält, der Bew. 1.2.2 wird aber zeigen, dass diese Strategie auch gegen eine rationale Spielweise sinnvoll ist. Da der Pot bei mindestens 2,5 liegt (andernfalls wäre Feind als erstes dran) gilt:

$$\text{Auto-Bet sinnvoll} \Leftrightarrow P_F(f) > \frac{1}{2,5} = 0,4;$$

$$P_F(f) = 1 - P_F(\text{weeterspielen}) = 1 - [P_F(\text{mindestens ein Paar}) + P_F(\text{Flush oder Flushdraw}) + P_F(\text{Straight oder Straightdraw})] \geq 1 - [1 - \frac{48 * 44 * 40 * 36}{51 * 50 * 49 * 48} + \frac{4^5 * 10}{\binom{52}{5}} + \frac{4^4 * 9}{\binom{52}{5}} + \frac{12 * 11 * 10}{51 * 50 * 49}] \approx 46,1\%$$

4.9 Definition und Satz (Continuation-Bet)

Als Agressor ist unabhängig von den Karten, nach dem Flop die Strategie (bet) strikt dominant. Diesen bet nennt man **Continuation-Bet**.

4.9.1 Beispiel

Hero im BB $A\heartsuit K\heartsuit$.

Hero raist, MP3 f, CO f, Bu f, SB f, BB calls

Flop: $9\clubsuit 9\spadesuit Q\clubsuit \Rightarrow$ Hero bet.

4.9.2 Beweis

Angenommen, der Feind spielt nach Odds und Outs, dann sind die Hände die er spielt in etwa wie folgt verteilt:

20% Paare

30% suited cards

50% offsuited cards

$$\Rightarrow P_F(f) = 1 - P_F(\text{weeterspielen}) = 1 - [0,2 + 0,8 * P_F(\text{trifft mindestens ein Paar}) + 0,3 * P_F(\text{Flush}) + P_F(\text{Flushdraw}) + P_F(\text{Straight oder Straightdraw})] \geq 1 - [0,2 + 0,8 * (1 - \frac{48 * 44 * 40 * 36}{51 * 50 * 49 * 48}) + 0,3 * (\frac{4^5 * 10}{\binom{52}{5}} + \frac{4^4 * 9}{\binom{52}{5}}) + 0,7 * \frac{4^5 * 10}{\binom{52}{5}} + \frac{12 * 11 * 10}{51 * 50 * 49}] \approx 38\%$$

⇒ Unter der vorsichtig gewählten Annahme, dass man verliert falls der Feind nicht foldet, hat man einen erwarteten Nutzen von: $E(u) \geq 4 * 0,38 - 1 * 0,62 = 0,9 > 0$, dem erwarteten Nutzen von checken

⇒ Die Continuation Bet ist eine strikt dominante Strategie.

4.9.3 Korollar

Wenn Hero nach dem Flop die Nuts hält, vor dem Gegner sitzt, dieser aber Aggressor ist, so wird die Strategie (bet) durch (check, raise) dominiert.

1 Reduktion der gegnerischen Handrange

Hero sitzt im MP2 und hält $T\spadesuit T\heartsuit$, CO hält $A\clubsuit K\clubsuit$

Hero raises, MP3 folds, CO 3-Bets, 3 folds, Hero caps, CO calls

Handranges nach Preflop-Charts

Hero						Anzahl
Pairs	AA(3)	KK(3)	QQ(6)	JJ(6)	TT(6)	24
Suited Hands	AKs(2)	AQs(3)				5
Offsuited Hands	AKo(7)					7
Gesamt						36

CO								Anzahl
Pairs	AA(6)	KK(6)	QQ(6)	JJ(6)	TT(1)	99(6)	88(6)	37
Suited Hands	AKs(4)	AQs(4)	AJs(4)	ATs(2)	KQs(4)			18
Offsuited Hands	AKo(12)	AQo(12)	AJo(12)					36
Gesamt								91

Flop: $A\spadesuit 5\heartsuit J\clubsuit$

Hero bets (Conti-Bet nach 4.9), CO ???

Hero						Anzahl
Pairs	AA(3)	KK(3)	QQ(6)	JJ(6)	TT(6)	24
Suited Hands	AKs(2)	AQs(3)				5
Offsuited Hands	AKo(7)					7
Gesamt						36

\Rightarrow CO calls, da er sich mit $E_{CO} = \frac{18}{36} = 50\%$ und $P(Split) = \frac{9}{36} = 25\%$ vorne sieht und call Flop raise Turn spielen möchte. Hero kann aus dem Call seinerseits folgern:

Turn: $T\clubsuit$

Hero ???

CO							Anzahl
Pairs	AA(3)	KK(6)	QQ(6)	JJ(3)	99(6)	88(6)	30
Suited Hands	AKs(3)	AQs(3)	AJs(2)	ATs(1)	KQs(4)		13
Offsuited Hands	AKo(9)	AQo(9)	AJo(7)				25
Gesamt							91

\Rightarrow Hero bets, da $E_{Hero} = \frac{62}{68} \approx 91,17\%$. CO ???

Hero						Anzahl
Pairs	AA(1)	KK(3)	QQ(6)	JJ(3)	TT(3)	16
Suited Hands	AKs(1)	AQs(2)				3
Offsuited Hands	AKo(5)					5
Gesamt						24

\Rightarrow CO raises, da $E_{CO} = \frac{11}{24} \approx 45,83\%$ und $P(Split) = \frac{7}{24} \approx 29,17\%$. Hero ???

CO							Anzahl
Pairs	AA(3)	KK(6)	QQ(6)	JJ(3)	99	88	18
Suited Hands	AKs(3)	AQs(3)	AJs(2)	ATs(1)	KQs(4)		13
Offsuited Hands	AKo(9)	AQo(9)	AJo(7)				25
Gesamt							56

\Rightarrow Hero 3-Bets, da $E_{Hero} = \frac{38}{56} \approx 67,86\%$. CO ???

Hero						Anzahl
Pairs	AA(1)	KK	QQ	JJ(3)	TT(3)	7
Suited Hands	AKs	AQs				0
Offsuited Hands	AKo					0
Gesamt						36

⇒ CO calls, da $O_{CO} = 11$ und Potgröße 21,5a.

River: 2♣

Hero???

CO					Anzahl
Suited Hands	AKs(1)	AQs(1)	AJs(2)	ATs(1)	5
Offsuited Hands	AKo	AQo	AJo(7)		7
Gesamt					12

⇒ Hero bets, da $E_{Hero} = \frac{8}{12} > 50\%$. CO ???

CO raises, da er die Nuts hält und Hero folds aus der gleichen Erkenntnis.

Glossar: Texas Hold'em Short handed Fixed Limit a/2a

3-bet: Erneutes Erhöhen als Antwort auf einen Raise

Auto-Bet: Automatisches Setzen eines Spielers in der Flop-Setzrunde in einen unraised Pot

bet: Erster Einsatz in einer Setzrunde (außer in der Preflop-Setzrunde, da hier bereits SB und BB gesetzt haben)

BB: Siehe Spielpositionen

BU: Siehe Spielpositionen

callen: Einen Einsatz eines anderen Spielers mitgehen

cap: Erneutes Erhöhen als Antwort auf eine 3-bet (also die dritte Erhöhung einer Runde)

CO: Siehe Spielpositionen

cold call: Automatischer call von zwei oder mehr Einsätzen

community cards: Die fünf Gemeinschaftskarten

completen: SB füllt im Preflop den Einsatz vom BB auf

connected: Zwei aufeinander folgende Karten, z.B. 9 und 8, 5 und 4 etc.

Conti-Bet: Continuation-Bet: Automatisches Setzen eines Spielers in der Flop-Setzrunde, der zuvor erhöht hat.

Dealer: Kartengeber

Draw: Hand, die sich bei einer oder mehreren passenden, (noch ausstehenden) Gemeinschaftskarte(n) verbessern kann.

Equity: Gewinnwahrscheinlichkeit

first-in: Der erste setzende Spieler einer Runde

Flop: Die ersten drei Gemeinschaftskarten und die nachfolgende, zweite Setzrunde

Gapper: Zwei Karten, zwischen denen eine (One-Gapper), zwei (Two-Gapper), drei (Three-Gapper) oder vier (Four-Gapper) Karten liegen. Z. B. One-Gapper: 7 und 5, A und Q; Four-Gapper: 9 und 4

Hand: Die fünf besten Karten aus den zwei verdeckten und den fünf community cards

Handrange: Wahrscheinliche Hände/Karten eines Gegenspielers

Hero: Die Ich-Position bei der Spielanalyse

limpen: In der preflop-Setzrunde nur callen (nicht raisen)

Made Hand: Eine fertige Hand (Paar oder besser)

MP 2: Siehe Spielpositionen

MP 3: Siehe Spielpositionen

Nuts: Bestmögliche Hand

offsuited: Karten unterschiedlicher Farbe

Pot: Gesammelte Einsätze eines Spiels, Gewinn bei Spielende

Preflop: Die zwei ersten verdeckten Karten pro Spieler und die erste Setzrunde

random hand: Zufällige Hand. Bei der Spielanalyse eine gegnerische Hand, über die man keine Information hat.

raised Pot: Pot, der bereits mindestens einmal erhöht wurde

raisen: Den Einsatz erhöhen

reraisen: Einen bereits erhöhten Einsatz erneut erhöhen, siehe auch 3-bet und cap

River: Die fünfte Gemeinschaftskarte und die darauf folgende Setzrunde

Short handed: 3-6 Spieler

SB: Siehe Spielpositionen

Spielpositionen: (In der Spielreihenfolge)

- SB = Small Blind
- BB = Big Blind
- MP 2 = Middle Position 2
- MP 3 = Middle Position 3
- CO = Cut off
- BU = Button = Dealer

Starthand: Die zwei verdeckten Karten pro Spieler

suited: Karten gleicher Farbe

Turn: Die vierte Gemeinschaftskarte und die nachfolgende, dritte Setzrunde

unraised Pot: Pot, der noch nicht erhöht wurde