Markov-Oekonomie und Stochastisch-Dynamische Systeme

7. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

Markov-Ketten, allgemein Stochastische Prozesse, sind ein sehr mächtiges Mittel, um Aspekte dynamischer Systeme zu charakterisieren. Da dieses Themengebiet viel zu umfangreich ist, um es in einem Artikel abzuhandeln, sollen hier anhand eines konkreten Beispiels Möglichkeiten angedeutet werden.
Dieses behandelt das Auftreten von Geld in einer Tauschwirtschaft. Das Modell wird ein Hybrid der Theorie der Makov-Ketten und der Spieltheorie sein, da wir den Ergodensatz nutzen werden, um die Auszahlungen des Spiels zu definieren.

1 Das Auftreten von Geld in einer Tauschwirtschaft

Im Rahmen der Spieltheorie werden wir ein stochastisches Modell der Produktion und des Handels entwickeln, das den Bedarf einer Geschäftsabwicklung nach Geld illustriert, und das zeigt, wie Geld innerhalb eines evolutionär-dynamischen Prozesses auftreten könnte.
Wir betrachten ein Spiel mit einer großen, aber endlichen Anzahl Spieler, die jeweils eine endliche, nicht festgelegte Nummer von Runden lebt. In jeder Runde

werden die Spieler zufällig zusammengeführt und betreiben gegenseitigen Austausch. Jeder Spieler produziert einige Güter, konsumiert andere, und besitzt ein Inventar an ungehandelten Gütern. Wir werden zeigen, dass unter plausiblen Bedingungen ein Nash-Gleichgewicht existiert, in dem mit Geld gehandelt wird. Das heißt es gibt ein Gut, welches ein reines Medium des Tausches ist. Dieses wird von allen Spielern im Handel akzeptiert, und hat für jeden Spieler nur den Wert, dass es für spätere Tauschgeschäfte genutzt werden kann.
Jeder Spieler hat eine Strategie, die spezifiziert, welche Tauschgeschäfte ausgehend von seinem Vor-Handels-Inventar akzeptabel sind, und was er bei einem gegebenen Nach-Handels-Inventar produziert und konsumiert. Wir nehmen an, dass jeder Spieler eine feste Wahrscheinlichkeit $\rho < 1$, in der nächsten Runde noch zu leben, hat. Ein Spieler der stirbt, wird unmittelbar durch einen identischen Spieler mit leerem Inventar, der die Strategie seines Vorgängers übernimmt, ersetzt. Im Folgenden werden die Spieler als Händler bezeichnet.

1.1 Das Spielszenario

Sei G die endliche Menge von Gütern der Wirtschaft, jedes in einer ganzzahligen Anzahl erhältlich, und sei H die endliche Menge von Händlern. Jeder Händler $h \in H$ konsumiert Güter $C_h \subset G$ und produziert Güter $P_h \subset G$. Händler konsumieren nicht die Güter die sie produzieren, somit müssen sie handeln.
Jeder Händler $h \in H$ hat eine auf C_h wachsende Nutzenfunktion u_h. Jedes Gut $g \in P_h$ hat Produktionskosten $k_{hg} > 0$, und wir nehmen an, dass für jedes $c_h \in C_h, u_h(c_h) > \min_{g \in P_h} k_{hg}$ (d.h. der Händler hat mindestens ein Gut dessen Produktionskosten geringer sind, als der Nutzen c_h zu konsumieren).
Falls p ein Packet von Gütern, bestehend aus n_{hg} Stück von jedem Gut $g \in G$ ist, schreiben wir $p = \sum_{g \in G} n_{hg} g$. Die Kosten um $p = \sum_{g \in G} n_{hg} g$ zu produzieren betragen somit

$$k(p) = \sum_{g \in P_k} n_{hg} k_{hg}.$$

Zusätzlich fällt jedem Spieler $h \in H$ ein Lagerkostenbetrag $\alpha_h(g) > 0$ pro Handelsperiode für jedes Stück Gut g in seinem Inventar an. Die Lagerkosten für Inventar $i_h = \sum_{g \in G} n_{hg}$ sind also

$$\alpha_h(i_h) = \sum_{g \in G} n_{hg} \alpha_h(g).$$

Der Nutzen von Händler $h \in H$ in Runde t beträgt dementsprechend

$$v_{ht} = u_h(c_{ht}) - k_h(\gamma_{ht}) - \alpha_h(i_{ht}), \tag{1}$$

wobei c_{ht} die Menge der in Runde t kosumierten Güter, γ_{ht} die Menge der in Runde t produzierten Güter und i_{ht} das Inventar, das h in die die nächste Runde mitnimmt bezeichnen. Die Gesamtnutzen von Händler h beträgt

$$v_h = \sum_{t=0}^{T} v_{ht} \tag{2}$$

wobei T eine Zufallsvariable ist, die die Periode in der der Händler stirbt darstellt.
Händler werden jede Runde zufällig zusammengeführt. Eine reine Handelsstrategie $s_h \in S_h$ für Händler $h \in H$ besteht aus dem Folgenden für jedes Inventar i_h:

- eine Handelsfunktion $A_h(i_h)$ so dass falls Inventar $j_h \in A_h(i_h)$, dann ist h bereit so zu handeln, dass sich Inventar i_h nach Inventar j_h verschiebt;
- eine Konsumfunktion $c_h(j_h) \subset j_h$ welche zeigt was h vom Post-Handels-Inventar j_h konsumiert;
- eine Produktionsfunktion $\gamma_k(j_h)$, die zeigt welche Güter von h produziert werden, um sie dem Post-Handels-Inventar j_h hinzuzufügen.

Selbstverständlich ist die Menge S_h von reinen Handelsstrategien endlich, da die Anzahl der Inventare endlich ist.
Falls Händler h und h' die Strategien $s_h \in S_h$ und $s_{h'} \in S_{h'}$ nutzen, aufeinandertreffen und Inventare i_h und $i_{h'}$ halten, definieren ihre Handelsfunktionen A_h und $A_{h'}$ eine (eventuell leere) Menge $G(s_h, i_h, s_{h'}, i_{h'})$ von gegenseitig akzeptablen Tauschgeschäften. Falls diese Menge nichtleer ist, wird zufällig ein Tausch aus den Pareto-Effizienten Elementen ausgesucht.

Falls $s = \{s_h | h \in H\}$ eine reine Strategie für das Spiel ist, und wir jeden Händler mit einem leeren Inventar beginnen lassen, wird das Modell einen Zeitpfad des Konsums, der Produktion, des Tausches, und der Inventare eines jeden Spielers in jeder zukünftigen Zeitperiode, abhängig von der zufälligen Zusammenführung von Spielern, und der Wahl aus der Menge der gegenseitig akzeptablen Tauschgeschäfte, definieren. Dies kann ein sehr großes Spiel mit einer gigantischen Zahl an Strategien und Tauschgeschäften sein.

Jedoch gibt es einen einfachen Weg das Modell in den Griff zu bekommen: Wir fragen, was in Langzeit-Gleichgewichten passiert, wenn die Muster von Konsum, Produktion und Handel in einem sachgerechten Sinne *zeitunabhängig* geworden sind. In solch einer Situation können wir annehmen, dass jeder Händler die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Händlertypen und Inventare kennt. Er wird Produktion, Konsum und Tauschstrategien so wählen, dass er den Langzeitnutzen maximiert; seine Erwartungen an den Langzeitnutzen auf dieser Verteilung basierend.
Aber wie erhalten wir solch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

1.2 Das stochastische Modell

Wir beschreiben den Zustand des Spieles zu einem Zeitpunkt durch den Inventarzustand $I = \{i_h | h \in H\}$ der Händler. Die Spielstrategie s generiert dann eine endl. Übergangsmatrix P^s, so dass $P^s(I, I')$ die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von I nach I' ist. Die Zufallsvariable I, festgelegt durch P^s, ist dann

eine endliche Markov-Kette, da zu jedem Zeitpunkt das Verhalten der Spieler nur von dem momentanen Inventar und seiner Strategie abhängt[1]. Da nach Konstruktion jeder Zustand eine Wahrscheinlichkeit größer null hat in den Ursprungszustand überzugehen[2], jeder Zustand mit positiver Wahrscheinlichkeit von dem Ursprungszustand ereichbar ist[3], greift der Ergodensatz.
Es existiert eine stationäre Verteilung ϕ^s auf der Menge der Inventare. Genauer bedeutet dies, dass für jedes Inventar I die Wahrscheinlichkeit, $\phi^+(I)$, dass I in der nächsten Periode auftritt, gegeben durch

$$\phi^+(I) = \sum_{I'} \phi^s(I')P^s(I', I)$$

die Gleichung $\phi^+(I) = \phi^s(I)$ erfüllt.
Der Ergodensatz besagt also, dass nachdem das Spiel eine genügend lange Zeit gelaufen ist, die zu erwartende Verteilung der Inventare der stationären Verteilung ϕ^s entsprechen wird. Also ist es zweckmäßig für einen Spieler ϕ^s zu nutzen, um eine optimale Produktions-, Handels- und Konsumstrategie zu planen.
Um ein Gleichgewichtskonzept zu definieren, sei Ω die Menge der Zeitpfade, erzeugt durch I. $\omega \in \Omega$ ist eine Folge

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t, \dots) \in \prod_{t=0}^{\infty} I,$$

ω_t die Inventare nach dem Handel zu Zeitpunkt t. ω_{ht} sei die zu Händler h gehörende Komponente von ω_t. Nach (1) ist der Nutzen von Händler h in Runde t, im Falle des Pfades $\omega \in \Omega$, gegeben durch

$$v_{ht}(\omega; s_h) = u_h(c_h(\omega_{ht})) - k_h(\gamma_h(\omega_{ht})) - \alpha_h(\omega_{h,t-1}).$$

Nach (2) kann man die Auszahlung von Händler $h \in H$ mit Handelstrategie s_h und Handelsvergangenheit $\omega \in \Omega$ als

$$v_h(\omega; s_h) = \sum_{t=0}^{T} v_{ht}(\omega; s_h),$$

schreiben, wobei T die den Tod des Händler's repäsentierende Zufallsvariable ist. Die Auszahlung von Händler $h \in H$, unter der Anfangsbedingung i_0 ist somit

$$v_h(s|i_0) = E(v_h(\omega; s)|\omega_0 = i_0),$$

wobei der Erwartungwert bezüglich dem durch die Markovkette gegebenen Maß[4] gebildet wird.

[1]Das Spiel wurde unter der Annahme konstruiert, dass die Spieler sich nicht wiedererkennen, keine langfristigen Verträge abschließen.

[2]Die Wahrscheinlichkeit in den Ursprungszustand überzugehen ist größer gleich der Wahrscheinlichkeit $\rho^{|H|} > 0$, dass alle Spieler in der selben Runde sterben.

[3]Das Spiel wird auf diese Zustände beschränkt, da die nicht erreichbaren Zustände nicht von Interesse für das Spiel sind.

[4]Für jede Ausgangsbedingung i_0 definieren wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung so, dass die Wahrscheinlichkeit eines Pfades $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n$ der Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette ausgehend von i_0 dem Pfad ω folgt entspricht. Eine existierende (eindeutige) Fortsetzung liefert das gewünschte Maß.

Sind nun eine Strategie s und für jeden Händler ein leeres Anfangsinventar gegeben, so lässt sich die Markov-Ökonomie nach einer 'Startphase' in seiner stationären Verteilung nieder, in welcher die Inventare bzgl. φ^s verteilt sind. Dementsprechend können wir die Auszahlung von Händler h durch die erwartete Auszahlung an Strategie s definieren, unter der Bedingung, dass h mit einem leeren Inventar startet, und die anderen Inventare entsprechend der stationären Verteilung φ^s verteilt sind. Genauer ist φ_h^s die bedingte Wahrscheinlichkeit auf Ω, gegeben durch $\varphi_h^s(i) = \varphi^s(i|i_0(h) = \emptyset)$. Wir definieren die Auszahlung von Händler h durch

$$v_h(s) = E_{\varphi_h^s(i)}(v_h(\omega; s)).$$

Dies ist die erwartete Auszahlung des Händlers, falls er Strategie s befolgt und die Information von jedem Händler nur die Übergangsmatrix P^s ist.
Nachdem wir die Auszahlungen für jede Strategie $s \in S$ und jeden Spieler $h \in H$ definiert haben, ist unsere Markov-Ökonomie ein endliches Spiel. Falls ein Händler eine gemischte Strategie s^* verwendet, so ist die Wahrscheinlichkeit $P^{s^*}(I, J)$ von Zustand I in Zustand J überzugehen einfach die entsprechende konvexe Linearkombination der P^s's; $s \in S$ die reinen Strategien. Die Auszahlungen der Händler entsprechen somit den gewichteten Summen der Auszahlungen der zugrundeliegenden reinen Strategien.

1.3 Interessante Nash-Gleichgewichte

Offensichtlich ist der Fall, dass kein Spieler irgendetwas produziert, konsumiert oder handelt (Kein-Handel-Strategie), ein Nash-Gleichgewicht.
Jedoch existieren viele weitere Nash-Gleichgewichte, was aus dem folgenden Satz resultiert.

Satz 1 *Angenommen jeder Spieler $h \in H$ sei auf eine nichtleere Menge $U_h \subset S_h$ von reinen Strategien beschränkt. Dann gibt es in dem eingeschränktem Spiel ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, das auf den reinen Strategien $\in \{U_h | h \in h\}$ basiert.*

Beweis:
Der Satz von Nash besagt, dass zu jedem endlichen Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien existiert.

Satz 2 *Angenommen jeder Händler produziere genau ein Gut g, und für je zwei beliebige Güter f und g gäbe es einen Produzenten von f, der g konsumiert. Falls von jedem Gut der Nutzen des Konsums ausreichend groß ist, gibt es ein Nash-Gleichgewicht, in dem alle Güter mit positiver Wahrscheinlichkeit gehandelt werden.*

Beweis:
Wir betrachten zuerst die Menge der wie folgend beschränkten Strategien: Jeder Händler muß in jeder Runde ein Gut in seinem Inventar behalten. Außerdem biete jeder Händler den Tausch des von ihm produzierten Gutes p_h Stück für Stück gegen jedes Kosumgut $c_h \in C_h$ an. Nach Satz 1 existiert ein Nash-Gleichgewicht

σ für die resultierende 'eingeschränkte' Markov-Ökonomie.
Als nächstes zeigen wir für dieses Nash-Gleichgewicht, dass für jedes Gut die Wahrscheinlichkeit dass es gehandelt wird, positiv ist, falls der Nutzen des Konsums von jedem Gut ausreichend groß ist.
Sei also der Nutzen des Konsums eines jeden Gutes $c_h \in C_h$ größer als die Produktionskosten des Gutes des Händlers. Angenommen es gäbe ein Gut g, welches nicht gehandelt wird. Sei $h \in H$ ein Produzent von g, also hält h in jeder Runde g in seinem Inventar. Sei weiter angenommen, dass h das Gut f konsumiert, und sei $b \in H$ ein Händler, der f produziert und g konsumiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass Händler b stirbt und in der nächsten Runde durch einen identischen Händler b ersetzt wird, ist positiv. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Händler h auf Händler b trifft, und Händler b das Gut f in seinem Inventar hat positiv. In diesem Fall käme es zu einem Tausch g gegen f, was ein Widerspruch ist. Jedes Gut wird also mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit gehandelt.
Als Letztes zeigen wir, dass Strategie σ auch in der Menge aller Strategien ein Nash-Gleichgewicht bleibt, falls der Nutzen des Konsums genügend groß ist. Dafür betrachten wir einen beliebigen Händler $h \in H$, und nehmen an, dass alle anderen Händler $\sigma_{-h} = \{\sigma_b | b \in H, b \neq h\}$ folgen. σ_h bleibt eine beste Antwort auf σ_{-h}! Die einzigen Gründe warum σ_h keine beste Antwort bleiben könnte sind einerseits, dass σ_h durch die Kein-Handel-Strategie dominiert wird und andererseits, dass es optimal für h bleibt das Gut p_h zu produzieren, obwohl es ein Gut $c_h \in C_h$ gibt, so dass es nicht optimal ist es in einem Tausch für g_h zu akzeptieren.
Die zweite Möglichkeit kann wegen der Annahme, dass der Nutzen des Konsums genügend größ ist, ausgeschlossen werden.
Sei also angenommen, dass es für einen Händler $h \in H$, der p_h produziert und c_h kosumiert, besser ist der Kein-Handel-Strategie, welche 0 als Auszahlung hat, zu folgen. Also muß h's Strategie σ_h, p_h zu produzieren, p_h in seinem Inventar zu halten bis h einen Händler trifft der c_h in seinem Inventar hält und bereit ist p_h im Tausch zu akzeptieren, eine negative Auszahlung haben. Sei $b \in H$ ein Spieler, der $c_h \in C_h$ produziert und p_h konsumiert. Da die Wahrscheinlichkeit β, dass h den Händler b mit c_h in seinem Inventar tifft, in jeder Runde positiv ist, muss die Auszahlung von σ_h der rekursiven Gleichung

$$v_{\sigma_h} \geq \beta(u_h(c_h) - k_{hp_h}) - \alpha_h(p_h) + (1-\rho)v_{\sigma_h}$$

$$\Rightarrow v_{\sigma_h} \geq [\beta(u_h(c_h) - k_{hp_h}) - \alpha_h(p_h)]/\rho$$

genügen. Dies ist ein Widerspruch, da somit $v_{\sigma_h} > 0$ für $u_h(c_h)$ genügend groß.

Welche Rolle spielt aber das Geld in der Tauschwirtschaft?

Definition 1 *Ein Gut $m \in G$ ist ein universelles Medium des Tausches, falls die Wahrscheinlicheit, dass m gehandelt wird, in jeder Runde postiv ist, und m im Tausch gegen alle Güter $g \neq m$ von allen Händlern akzeptiert wird. Ein Gut $m \in G$ hat geringe Lagerkosten, falls für jeden Händler $h \in H$,*

$\alpha_h(m) \leq \alpha_h(p_h), p_h \in P_h$ gilt (d.h. die Lagerkosten von m sind nicht größer als die Lagerkosten der von h produzierten Gütern).

Satz 3 *Angenommen jeder Händler $h \in H$ produziere genau ein Gut g_h und m habe geringe Lagerkosten. Weiter gäbe es für jedes Gut $g \in G$ einen Händler, der m produziert und g konsumiert. Dann gibt es ein Nash-Gleichgewicht in der Ökonomie, in dem m ein universelles Medium des Tausches ist.*

Beweis:
Analog zum letzen Beweis, beschränken wir uns auf eine geeignete Menge von Strategien. Wir zeigen die Aussage auf dieser beschränkten Menge und dann, dass das Nash-Gleichgewicht bestehen bleibt, wenn man die Einschränkungen fallen lässt.
Skizze: Man nehme an, dass $m \in G$ die Bedingungen des Satzes erfüllt. Drei Einschränkungen der Menge der reinen Strategien der Händler: Erstens, beschränke jeden Spieler darauf in jeder Runde eine Einheit eines Gutes in seinem Inventar halten zu müssen. Zweitens, betrachte für jeden Spieler $h \in H$ nur die Handelspräferenzen A_h, bei denen h's Nach-Handels-Inventar nicht kleiner als h's Vor-Handels-Inventar ist. Drittens, setze voraus, dass alle Spieler Strategien wählen, in denen eine Einheit m im Tausch gegen jeden Artikel $g \neq m$ den sie gerade in ihrem Inventar haben, akzeptiert wird. Zeige, dass im resultierenden Nash-Gleichgewicht m ein universelles Medium des Tausches ist und dass, wenn man die Einschränkungen fallen lässt, kein Spieler davon profitiert, wenn er seine Strategie ändert.

Was ist mit Geld, welches von keinem Spieler produziert oder kosumiert wird? (Mutmaßlich wird es von einem außenstehendem Händler, wie zum Beispiel der Regierung, produziert.) Angenommen es gibt ein ermächtigtes Gut,d.h. ein Gut welches von keinem Händler produziert oder konsumiert wird, aber dass gehandelt werden kann. Nach dem Tod eines Händlers wird das ermächtigte Gut an den Nachfolger des verstorbenen Händlers weitergegeben. Wir bezeichnen das ermächtigte Gut als Geld, wenn es von allen Händlern akzeptiert wird.

Satz 4 *Angenommen es gäbe ein ermächtigtes Gut m, jeder Händler produziere genau ein Gut, jedes Gut außer m werde von mindestens einem Händler produziert, und für jeweils zwei Güter $g, f \neq m$ gäbe es einen Produzenten von g der f konsumiert. Falls die Menge von m genügend klein, die Lagerkosten von m genügen klein, und der Nutzen des Konsums genügend hoch ist,dann gibt es ein Nash-Gleichgewicht, in dem jedes Gut $g \neq m$ gegen m, in jeder Runde mit einen positiven Wahrscheinlichkeit, gehandelt wird; d.h. m ist Geld.*

Beweis:
Skizze: Erstens, beschränke jeden Spieler darauf in jeder Runde eine Einheit eines Gutes in seinem Inventar halten zu müssen. Zweitens, bechränke jeden Spieler darauf, dass er nur eine Einheit eines Gutes im Tausch anbietet. Drittens, verlange von jedem Spieler, dass er eine Einheit von m im Tausch gegen ein Gut $g \neq m$ seines Inventars akzeptiert. Zeige, dass in dem resultierendem Nash-Gleichgewicht das ermächtigte Gut mit positiver Wahrscheinlichkeit gehandelt

wird, und dass, wenn man die Einschrängungen fallen lässt, kein Spieler davon profitiert, wenn er seine Strategie ändert.

2 Anhang

2.1 Definition: Markov-Kette

Eine Folge $X_0, X_1, \ldots$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) mit Werten in E heißt eine *Markov-Kette* mit *Zustandsraum* E und *Übergangsmatrix* Π, wenn für alle $n \geq 0$ und alle $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ gilt:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \Pi(x_n, x_{n+1}),$$

sofern $P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$. Die Verteilung $\alpha = P \circ X_0^{-1}$ von X_0 heißt die *Startverteilung* der Markov-Kette.

2.2 Satz: Ergodensatz für Markov-Kette

Sei E endlich, und es gebe ein $k \geq 1$ mit $\Pi^k(x, y) > 0$ für alle $x, y \in E$. Dann existiert für alle $y \in E$ der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \Pi^n(x, y) = \alpha(y) > 0$$

unabhängig von der Wahl des Startpunktes $x \in E$, und der Limes α ist die einzige Zähldichte auf E mit

$$\sum_{x \in E} \alpha(x) \Pi(x, y) = \alpha(y) \ \forall y \in E.$$

3 Quellen

Georgii, H.-O.; Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik; de Gruyter, 2002

Gintis, H.: A Markov Model of Production, Trade and Money; University of Massachusetts, 1996.

Gintis, H.: Game Theory Evolving; Princeton University Press, 2000. p. 220 -228

Durret, R.: Probability: Theory and Examples, 1996