<u>Inspektionsspiele</u>

Projektvortrag von Andreas Hapek

Ein **Inspektionsspiel** ist ein 2 Personen Spiel, in der ein **Inspektor (Kontrolleur)** darüber wacht, dass sich die Gegen-Partei, der sog. **Inspizierte**, an bestimmte Regeln hält.

Der Inspizierte hat dabei Anreize gegen diese Regeln zu verstoßen. Will dabei aber nicht vom Inspektor erwischt werden.

Das oberste Ziel für den Inspektor ist dabei ein illegales Verhalten des Inspizierten durch Überwachungsmaßnahmen zu verhindern.

Typische Beispiele:

- zufällige Kontrollen im Personennahverkehr
- unangekündigte Kontrollen im Abrüstungsprozess von Waffen

Inspektionsspiele in sequentieller Form

- Variante mit n Stufen und k Kontrollen
- Inspektor I führt $k \leq n$ Kontrollen durch
- Der Inspizierte O hat höchstens eine illegale Aktion zur Verfügung, die er zu jedem n einsetzen kann.
- O weiß zu jedem Zeitpkt. t, wie viele Kontrollen I noch einsetzen kann.

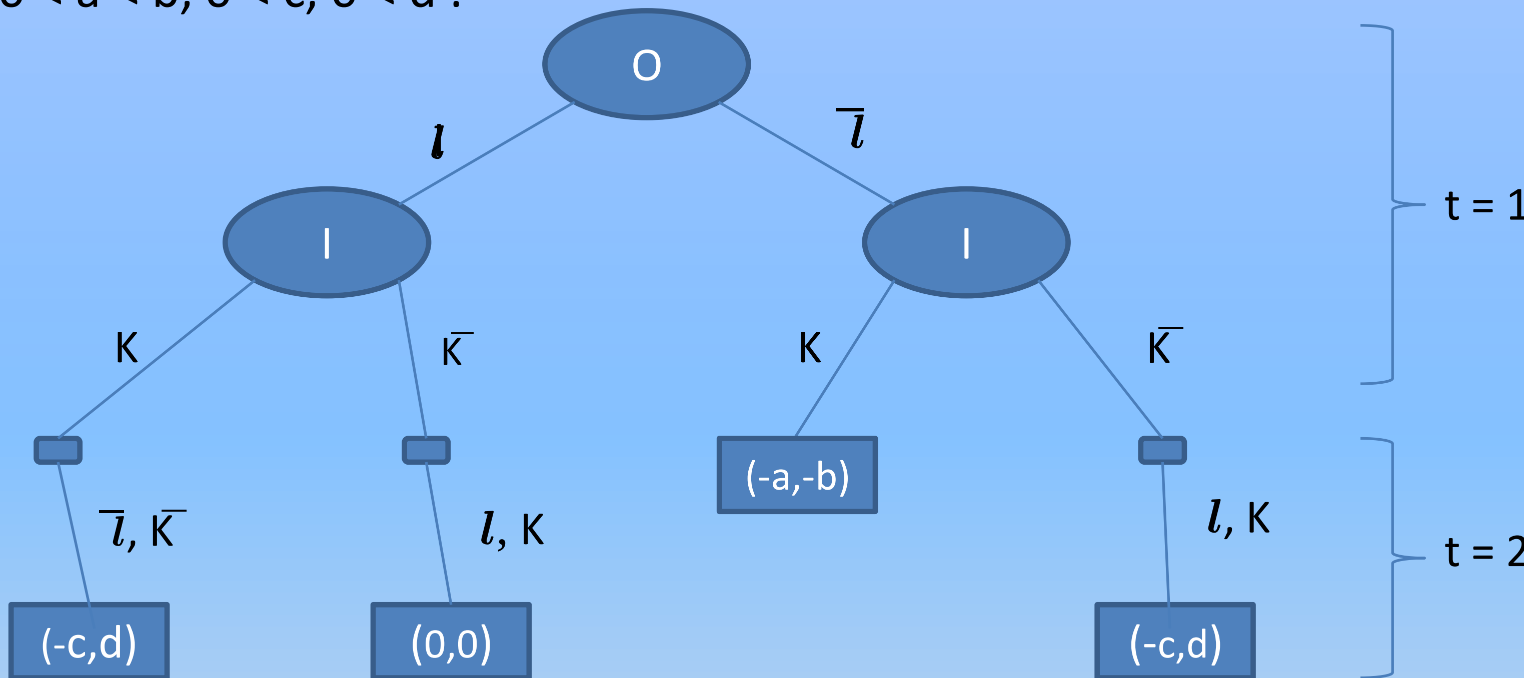
3 Abbruchfälle:

1. I hat O bei einer illegalen Handlung erwischt

2. I hat alle Kontrollen frühzeitig aufgebraucht
   --------> O verhält sich sofort illegal

3. I kann noch so oft kontrollieren, wie es restliche Stufen gibt.
   --------> O verhält sich für die restlichen Stufen immer legal

Hier eine graphische Darstellung des Spiels mit $n = 2$ und $k = 1$.
Dabei sei $0 < a < b$, $0 < c$, $0 < d$:



Die Spieler kennen dabei immer nur die vergangenen Entscheidungen des Gegenspielers. Die zukünftige Wahl treffen sie also nur auf Grund der zurückliegenden Strategiekombinationen.

Man weiß bereits nach $t = 1$ welche Auszahlung am Ende stehen werden:

I\O	l	$\bar{l}$
K	(-c,+d)	(-a,-b)
$\bar{K}$	(0,0)	(-c,+d)

Lösung des simultanen Spiels nach Nash:

		q	1-q
	I\O	l	$\bar{l}$
p	K	(-c,+d)	(-a,-b)
1-p	$\bar{K}$	(0,0)	(-c,+d)

Dabei existiert kein Gleichgewicht in reiner Strategie.
Gesucht ist also ein Glg. für eine gemischte Strategie.

Seien I(p,q) und O(p,q) die Auszahlungsfunktionen.
Das Paar (p*,q*) ist Glg. Des Spiels, wenn Nash-Bedingung

$$I(p^*,q^*) \geq I(p,q^*) \quad \forall\{p \in P\}$$
$$O(p^*,q^*) \geq O(p^*,q) \quad \forall\{q \in Q\}$$

erfüllt sind.

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn beide Spieler ihre Wahl so treffen, dass der Gegenspieler jeweils indifferent ist:

$$p^* \cdot d + (1-p^*) \cdot 0 = -p^* \cdot b + (1-p^*) \cdot d = O^*$$

$$-q^* \cdot c - (1-q^*) \cdot a = q^* \cdot 0 - (1-q^*) \cdot c = I^*$$

Daraus folgt:

$$p^* = \frac{d}{2d+b} \qquad q^* = \frac{c-a}{2c-a}$$

Mit den dazugehörigen Auszahlungen:

$$\boxed{I^* = I(p^*,q^*) = \frac{-c^2}{2c-a}} \qquad \boxed{O^* = O(p^*,q^*) = \frac{d^2}{2d+b}}$$

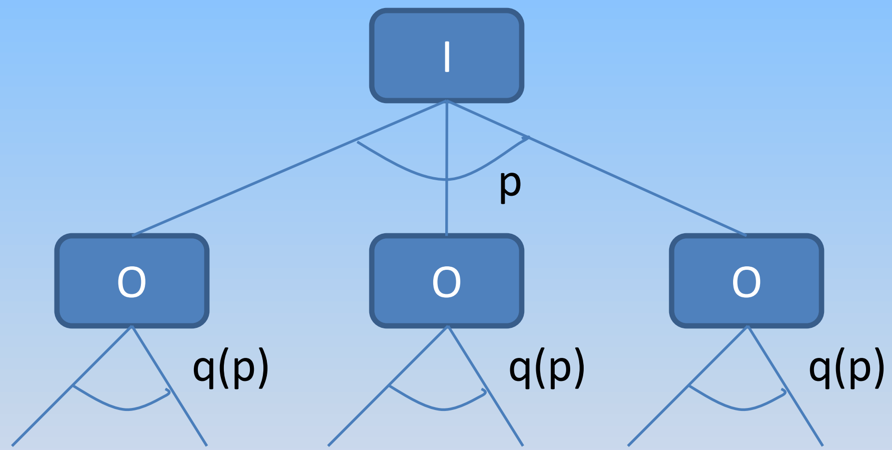
Was ändert sich, wenn der Inspektor die Möglichkeit hat, seine Strategie glaubhaft anzukündigen ?
Kann der Inspektor das ausnutzen, und wenn ja wie ?

<u>Führerschaftspiel (nicht simultane Variante) :</u>

<u>Bedingungen:</u>

- Inspektor muss sich an seine Ankündigung halten
- Inspizierte hat keine Zweifel über die Glaubwürdigkeit d. Inspektors

<u>Extensive Form:</u>



Der Inspektor I hat weiterhin die gleiche Strategiemenge P wie im simultanen Spiel.
Die Strategiemenge d. Inspizierten O hängt nun von P ab.

$$\Rightarrow \; Q^P = \{ q(\cdot) \mid q: P \to Q \}$$

Lösung des Führerschaftspiels (nicht-simultanes Spiel):

Strategiekombination (p^{**},q^{**}) mit $p^{**} \in P$ und $q^{**} \in Q^P$ heißt Nash-Lsg., wenn:

$$\begin{aligned} I(p^{**}, q^{**}(p^{**})) &\geq I(p\,, q^{**}(p^{**})) \quad \forall\{p \in P\} \\ O(p^{**},q^{**}(p^{**})) &\geq O(p^{**},q(p^{**})) \quad \forall\{q(\cdot) \in Q^P\} \end{aligned}$$

Satz: Bei gegebenem, eindeutigem Glg.Punkt eines simultanen 2x2 Spiels, ist im entsprechenden Führerschafts-Spiel die Gleichgewichtsstrategie *p* aus dem* simultanen Spiel für den Inspektor auch hier Gleichgewichtsstrategie. Und der Inspizierte spielt, unter seinen *besten Antworten* auf die angekündigte Strategie p*,diejenige als Gleichgewichtsstrategie, welche die Inspektorauszahlung *I(p*,q*(p*))* maximiert.

Also: $p^{**} = p^{*} = \dfrac{d}{2d+b}$

Dadurch bleibt auch die Auszahlung d. Inspizierten gleich: $O^{**} = O(p^{*},q^{*}) = \dfrac{d^2}{2d+b}$

Also: $q^{**}(p^{**})=1$

$$\Rightarrow I^{**} = p^{*}\cdot(-c) = \frac{-cd}{2d+b}$$

		q(p)	1-q(p)
	I\O	l	$\bar{l}$
p	K	(-c,+d)	(-a,-b)
1-p	$\bar{K}$	(0,0)	(-c,+d)

Mit: $I = -c\cdot(1 - q^{**}(p^{**}))$

Als Gleichgewichtsauszahlung an den Inspektor im Führersschaftspiel.

Ist die Gleichgewichtsauszahlung für den Inspektor im Führerschaftspiel größer als im simultanen Spiel ?

Dann muss gelten: $$I^{**} = \frac{-cd}{2d+b} > \frac{-c^2}{2c-a} = I^*$$

$$\Leftrightarrow -cd \cdot (2c-a) > -c^2 \cdot (2d+b)$$

$$\Leftrightarrow acd > -c^2 b$$

Damit ist also die Erwartungsauszahlung des Inspektors im Führerschaftsspiel höher als im simultanen Spiel, i.Z. **I** > I*.**

Die Auszahlung an den Inspizierten ist im Führerschaftsspiel unverändert, i.Z. **O**=O*** .

Vorteil für den Inspektor liegt darin, dass er seinen Kontrolleinfluss auf die 2 Stufen verteilen kann und dabei die Strategie des Inspizierten durch seine eigene Strategie beeinflusst wird.

Damit besteht für den Inspizierten eine positve W‘keit $p^* = \frac{d}{2d+b}$, dass er bei einer Kontrolle erwischt wird. Deshalb wählt O die rationale Antwort, sich legal zu verhalten.