Analyse eines Handballspielzugs
Projektarbeit im Rahmen der Vorlesung
Spieltheorie

Florian Heiss
Maria Landskron
Peter Jäger
Markus Schmich
Anna-Adele Jeltsch

Wintersemester 2008/2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung, Begriffserklärungen und Voraussetzungen

1.1 Abkürzungen

M := Mitte (An)
HL := Halblinks (An)
RA := Rechtsaußen (Ab)
LA := Linksaußen (An)
K := Kreis (An)
MR := Mitte Rechts (Ab)

An := Angreifende Mannschaft
Ab := Abwehrende Mannschaft
SR := Schiedsrichter
Z := Zufall

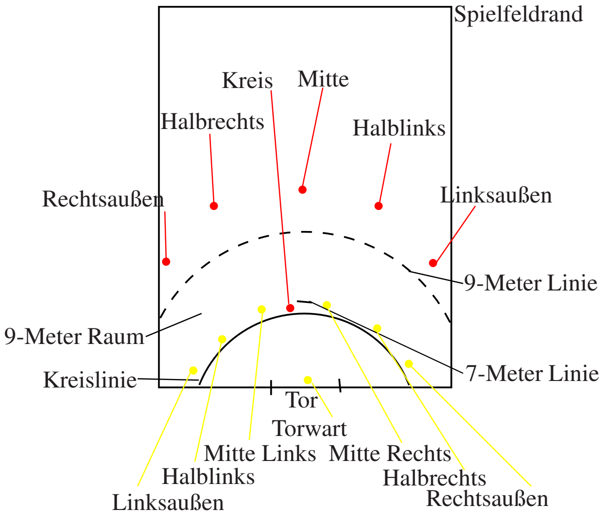
w := werfen
s := spielen
st := stören
u := unterbrechen
n := Spielzug neu
f := Freiwurf
7 := 7m
2 := 2 Minuten
e := Angriff Ende
ns := nicht spielen
n' := Spielzug' neu

Farben:

- Farbe Rot ≃ Angreifende Mannschaft
- Farbe Gelb ≃ Abwehrende Mannschaft
- Farbe Schwarz ≃ Schiedsrichter
- Farbe Blau ≃ terminale Historie

1.2 Handball - Eine Einführung in Regeln und Begriffe

Das Spielfeld[1]:



Es werden hier nur jene Handballregeln und Begriffe aufgeführt, welche für den Spielzug, bzw. für einen generellen Angriff wichtig sind[2].

Begriffe:

1. 7 Meter: Entscheidet der Schiedsrichter bei einem Foul auf 7-Meter, so hat die angreifende Mannschaft einen Spieler zu stellen, welcher nach Anpfiff des Schiedsrichters von der 7-Meter Linie einen direkten Torwurf ausführt. Dabei darf sich der Fuß des Standbeines nicht bewegen, ansonsten gilt es als übertreten und der Wurf wird nicht gezählt. Während des Wurfes müssen sich alle Spieler, außer dem Werfer, außerhalb des 9-Meter Raumes befinden.

2. 2 Minuten: Entscheidet der Schiedsrichter bei einem Foul auf 2-Minuten, so muss derjenige Spieler, der das Foul beging, das Spielfeld für 2 Minuten verlassen und seine Mannschaft spielt über diese Zeit in Unterzahl. Nach einer solchen Entscheidung wird je nach Foul und Schiedsrichter ein Freiwurf oder ein 7-Meter ausgeführt.

3. Freiwurf: Bei einer Freiwurfentscheidung hat die ausführende Mannschaft einen freien Wurf, bei dem jeder Gegenspieler mindestens 3 Meter Abstand vom Ball halten muss. Ein Freiwurf innerhalb des 9-Meter-Raumes wird an der 9-Meter Linie ausgeführt, ansonsten dort, wo das Foul stattfand.

Regeln:

1. Es dürfen mit Ball in der Hand maximal drei Schritte ohne zu tippen gelaufen werden

[1] Nicht maßstabsgetreu und verzerrt!

[2] Das vollständige Regelwerk kann hier betrachtet werden: http://www.handballregeln.de/

2. Tippen ist erlaubt, solange man ohne Unterbrechung tippt (also nicht tippen-fangen-tippen)

3. Spielfeldbegrenzungen sind des Spielfeldrand, die Kreislinie (diese darf nicht übertreten werden. Wird sie von einem Angreifer übertreten führt dies zu Ballverlust, wird sie von einem abwehrenden Spieler übertreten führt es zu einem 7 Meter).

4. Ein Tor wird gezählt, wenn regelkonform geworfen wurde und der Ball im Tor hinter der Torlinie ist (das Runde muss in das Eckige).

5. Für sportlich unfaires Verhalten existieren folgende Strafen (Entscheidungsbereich des Schiedsrichters): Strafe von Freiwurf über 2-Minuten-Strafe, Siebenmeter, gelbe Karte bis Rote Karte. Eine Entscheidung des Schiedsrichters kann nicht von den Spielern geändert werden.

6. Pro Mannschaft stehen 6 Feldspieler und 1 Torwart auf dem Feld (solange keine Zeitstrafe verhängt wurde)

7. Zeitspiel: Ein Angriff wird abgepfiffen, wenn die angreifende Mannschaft länger als ca. 1 Minute (Schiedsrichterabhängig) ohne erkennbaren Druck auf das gegnerische Tor einen Angriff ausführt (also Zeit schinden möchte)

8. Sperre: Bei einer Sperre blockiert ein angreifender Spieler einen Abwehrspieler mit dem Körper, ohne zu Hilfenahme der Arme, um einem anderen Angreifer einen freien Torwurf zu ermöglichen.

1.3 Modellannahmen

Um diesen Spielzug spieltheoretisch auswerten zu können, setzen wir einige (unrealistische) Annahmen voraus:

1. Alle Spieler sind gleich gut

2. Der Schiedsrichter trifft immer 'faire' Entscheidungen und sieht alles

3. Es gibt keine technischen Fehler[3]

4. Die Spieler (insbesondere die der abwehrenden Mannschaft) können ihre Aktionen so gezielt ausführen, dass sie die Reaktion des Schiedsrichters einschätzen können (dies zeigt sich im Spielbaum bei Spielzug unterbrechen im Vergleich zu Spielzug stören)

5. Es gibt keine zeitliche Begrenzung für den Angriff

6. Es wird ein Angriff ausgeführt.

7. Die Wahrscheinlichkeit einer Entscheidung des Schiedsrichters auf
   Freiwurf, liegt bei 80%
   2-Minuten, liegt bei 10%
   7-Meter, liegt bei 10%

[3]Technische Fehler sind z.B. das nicht fangen des Balles, Schrittfehler,...

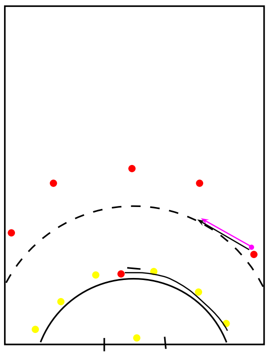
1.4 Der Spielzug

1.4.1 Ausgangssituation

Es gelten die offiziellen Handballregeln (benötigt werden allerdings nur die oben erklärten). Die rote Mannschaft befindet sich bereits im Angriffsspiel, d.h. die Möglichkeit eines Tempogegenstoßes[4] wird ausgeschlossen und die gelbe Mannschaft ist bereits in ihrer Abwehrformation.

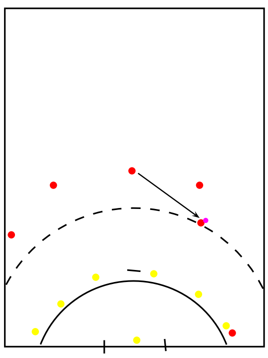
1.4.2 Der Spielzug

Der Spielzug läuft gemäß den unten dargestellten Graphiken ab:



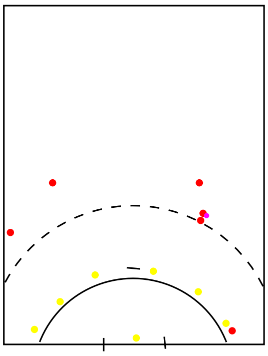
Kreis wechselt auf Linksaußenposition

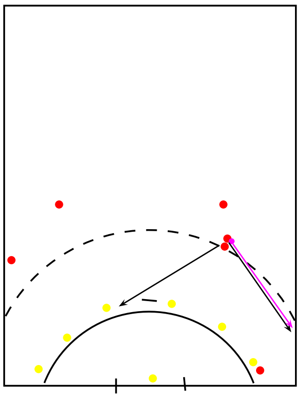
Linksaußen läuft Richtung Mitte



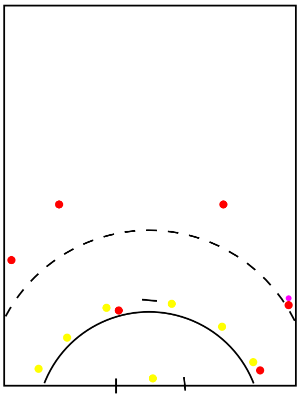
Mitte kreuzt mit Linksaußen und bekommt den Ball

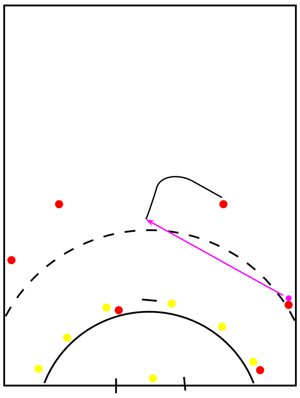
[4]Nach einem erfolglosen Torwurf wird versucht, vor der gegnerischen Mannschaft deren Tor zu erreichen um einen freien Torwurf erzielen zu können.



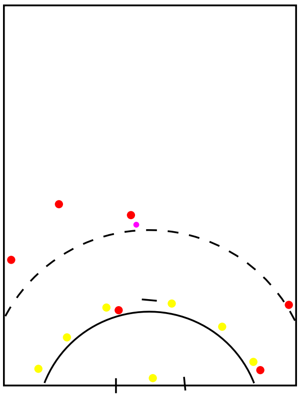


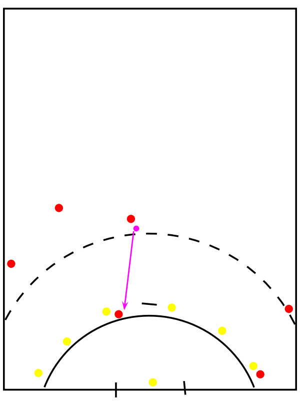
Linksaußen setzt eine Sperre bei Mitte Rechts
Mitte läuft mit Ball auf Außenposition



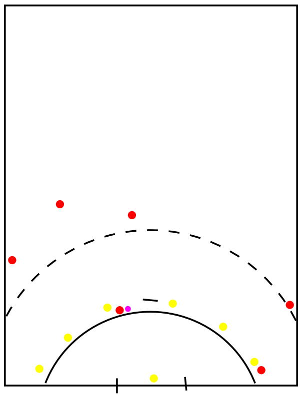


Halblinks läuft im Bogen auf Mitteposition
Mitte (auf LA Position) passt Ball zu HL





Pass auf Linksaußen (auf Kreisposition)



freier Torwurf

Bei jeder Ballbewegung entscheidet der Gegner: Spielzug spielen lassen (abwarten), auf den Ball gehen (Spielzug stören), Spielzug unterbrechen (hat mindestens Freiwurf bis maximal rote Karte zur Folge, je nach Unterbrechungsart).
Jeder angreifende Spieler hat die Möglichkeit (wenn er 'an der Reihe ist') den Spielzug weiterzuspielen, oder abzubrechen (Torwurf oder anders weiterspielen als im Spielzug geplant ist).

2 Das Modell

2.1 Payoffs

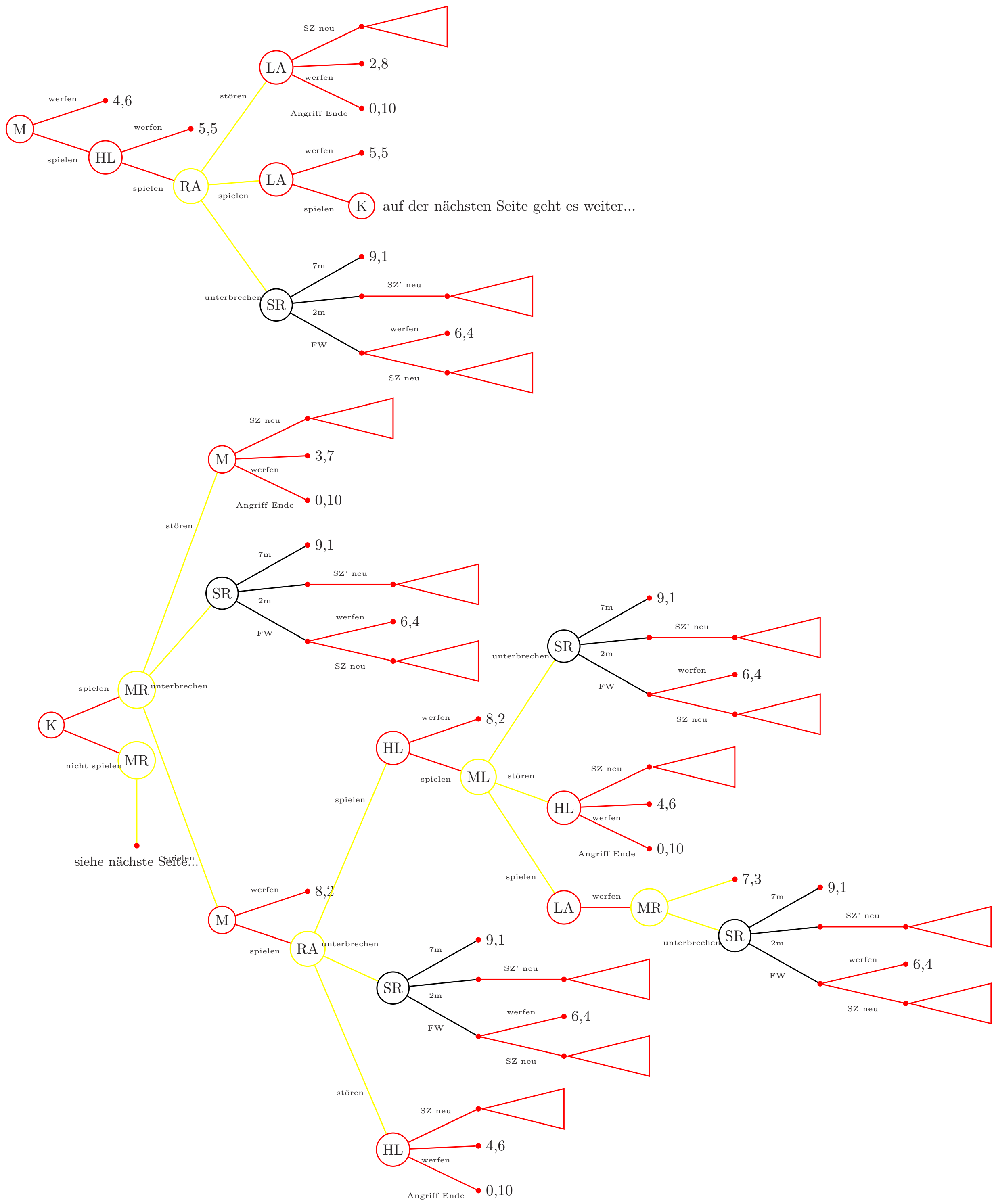
Für diesen Spielzug werden folgende Payoffs angenommen:
(10,x) entspricht 100% Wahrscheinlichkeit eines Tores
(x,10) entspricht 100 % Wahrscheinlichkeit keines Tores
(9,1) bei 7 Meter
(8,2) bei freiem Wurf mit einer Sperre
(7,3) bei einem freien Wurf
(6,4) bei einem Freiwurf
(5,5) im Zweikampf mit einem passiven (d.h. Aktion 'spielen') Gegner
(4,6) im Zweikampf mit zwei passiven (d.h. Aktion 'spielen') Gegnern
(3,7) im Zweikampf mit einem aktiven (d.h. Aktion 'stören, unterbrechen') Gegner
(2,8) im Zweikampf mit zwei aktiven (d.h. Aktion 'stören, unterbrechen') Gegnern
(0,10) Angriff Ende ohne Abschluß

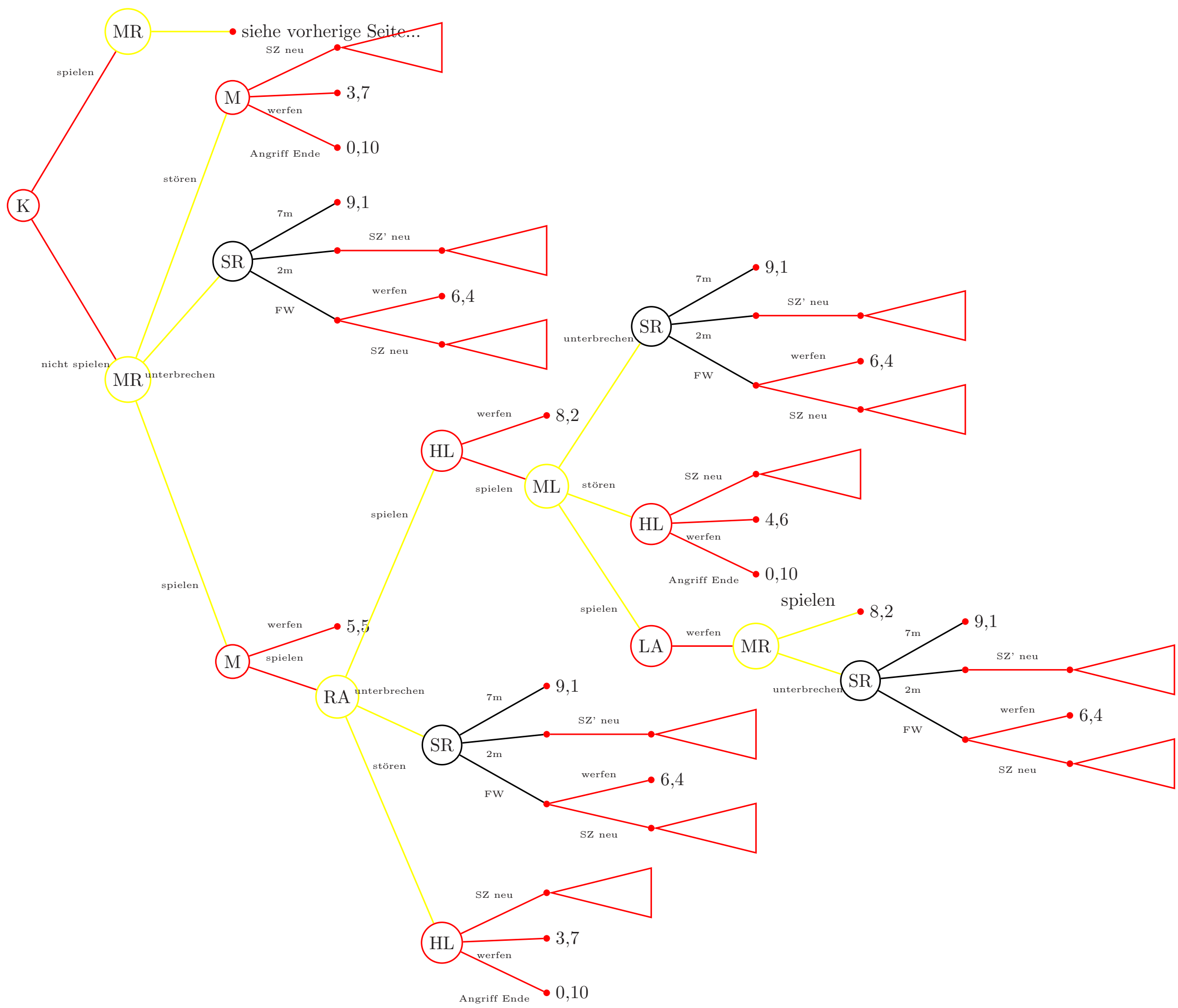
(6,4) für die Aktion Spielzug neu[5]
(8,2) für die Aktion Spielzug' neu[6]

Die Payoffs sind fiktiv erdacht, als Grundlage dienen Erfahrungswerte aus 22 Jahren Handball spielen in verschieden Klassen.

[5] wird erst in den Varianten relevant
[6] wird erst in den Varianten relevant

2.2 Der Spielbaum





2.3 extensive Form - formal

Das Spiel in extensiver Form mit vollkommener Information besteht aus:

• Der Spielermenge $M = \{An, Ab, SR\}$

• Der Menge H der Historien mit der Zerlegung $H = E_{An} \cup E_{Ab} \cup E_{SR} \cup Z$ mit $E \cap Z = \emptyset$

• der Spielerfunktion $P : E \longrightarrow M$, mit (für $z \in E$):

$$P(z) = \begin{cases} An, & \text{falls } z \in E_{An} \\ Ab, & \text{falls } z \in E_{Ab} \\ SR, & \text{sonst} \end{cases}$$

• Der Nutzenfunktion $u : Z \longrightarrow \mathbb{R}^N$, mit (für $z \in Z$):

$$u(z)) = \begin{cases} (9,1), & \text{falls } z \in s.u. \\ (8,2), & \text{falls } z \in s.u. \\ (7,3), & \text{falls } z \in s.u. \\ (6,4), & \text{falls } z \in s.u. \\ (5,5), & \text{falls } z \in s.u. \\ (4,6), & \text{falls } z \in s.u. \\ (3,7), & \text{falls } z \in s.u. \\ (2,8), & \text{falls } z \in s.u. \\ (0,10), & \text{falls } z \in s.u. \end{cases}$$

$(9,1) : z \in$:
$\{(s,s,u,7),(s,s,s,s,s,u,7),(s,s,s,s,s,s,s,u,7),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,7),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,7),(s,s,s,s,ns,u,7),(s,s,s,s,ns,s,s,u,7),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,7),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,7)\}$
$(8,2) : z \in$:
$\{(s,s,s,s,s,s,w),(s,s,s,s,s,s,s,s,w),(s,s,s,s,ns,s,s,s,w),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w)\}$
$(7,3) : z \in$:
$\{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w)\}$
$(6,4) : z \in$:
$\{(s,s,u,f,w),(s,s,s,s,s,u,f,w),(s,s,s,s,s,s,s,u,f,w),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f,w),$
$(s,s,s,s,ns,u,f,w),(s,s,s,s,ns,s,s,u,f,w),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f,w),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f,w),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,f,w)\}$
$(5,5) : z \in$:
$\{(s,w),(s,s,s,w),(s,s,s,s,ns,s,w)\}$
$(4,6) : z \in$:
$\{(w),(s,s,s,s,s,s,s,st,w),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,w),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,w)\}$
$(3,7) : z \in$:
$\{(s,s,s,s,s,st,w),(s,s,s,s,ns,st,w),(s,s,s,s,ns,s,s,st,w)\}$
$(2,8) : z \in$:
$\{(s,s,st,w)\}$
$(0,10) : z \in$:
$\{(s,s,st,e),(s,s,s,s,s,st,e),(s,s,s,s,s,s,s,st,e),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,e),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,st,e),(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,e)\}$

$M = \{An, Ab, SR\}$

$H = \{\emptyset,(w)^4,(s),(s,w)^5,(s,s),(s,s,st),$
$(s,s,s),(s,s,u,),(s,s,st,n),(s,s,st,w)^3,(s,s,st,e)^0,$
$(s,s,s,w)^5,(s,s,s,s),(s,s,u,7)^9,(s,s,u,2),(s,s,u,f),$
$(s,s,u,2,n'),(s,s,u,f,w)^6,(s,s,u,f,n),(s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,ns),(s,s,s,s,s,st),(s,s,s,s,s,u),(s,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,s,st,n),(s,s,s,s,s,st,w)^3,(s,s,s,s,s,st,e)^0,$
$(s,s,s,s,s,u,7)^9,(s,s,s,s,s,u,2),(s,s,s,s,s,u,f),(s,s,s,s,s,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,s,u,f,w)^6,(s,s,s,s,s,u,f,n),(s,s,s,s,s,s,w)^8,$
$(s,s,s,s,s,s,s),(s,s,s,s,s,s,s,st),(s,s,s,s,s,s,s,u),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s),(s,s,s,s,s,s,s,st,n),(s,s,s,s,s,s,s,st,w)^4,$
$(s,s,s,s,s,s,s,st,e)^0,(s,s,s,s,s,s,s,u,7)^9,(s,s,s,s,s,s,s,u,2),$
$(s,s,s,s,s,s,s,u,f),(s,s,s,s,s,s,s,u,2,n'),(s,s,s,s,s,s,s,u,f,w)^6,$
$(s,s,s,s,s,s,s,u,f,n),(s,s,s,s,s,s,s,s,w)^8,(s,s,s,s,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,n),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,w)^4,$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,e)^0,(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,7)^9,$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,2),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f),(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,2,n'),$

$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f,e),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w)^7, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,7)^9, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,2),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f,w)^6, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f,n),$
$(s,s,s,s,ns,st), (s,s,s,s,ns,u), (s,s,s,s,ns,s), (s,s,s,s,ns,st),$
$(s,s,s,s,ns,st,w)^3, (s,s,s,s,ns,st,n), (s,s,s,s,ns,u,7),$
$(s,s,s,s,ns,u,2), (s,s,s,s,ns,u,f), (s,s,s,s,ns,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,ns,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,u,f,n), (s,s,s,s,ns,s,w)^5,$
$(s,s,s,s,ns,s,s), (s,s,s,s,ns,s,s,st), (s,s,s,s,ns,s,s,u),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s), (s,s,s,s,ns,s,s,st,n), (s,s,s,s,ns,s,s,st,w)^3,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,st,e)^0, (s,s,s,s,ns,s,s,u,7)^9, (s,s,s,s,ns,s,s,u,2),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,u,f), (s,s,s,s,ns,s,s,u,2,n'), (s,s,s,s,ns,s,s,u,f,n),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,s,s,s,w)^8, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,n), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,w)^4,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,e)^0, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,7)^9,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,2), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f,n),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w)^8, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,7)^9, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,2),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,f), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,f,n)\}$

$E_{An} = \{\emptyset, (s), (s,s,st), (s,s,s), (s,s,s,s),$
$(s,s,u,2), (s,s,u,f), (s,s,s,s,s,st), (s,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,s,u,2), (s,s,s,s,s,u,f), (s,s,s,s,s,s,s,st), (s,s,s,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,s,s,s,u,2), (s,s,s,s,s,s,s,u,f), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,st),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,2), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,2), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f),$
$(s,s,s,s,ns,st), (s,s,s,s,ns,s), (s,s,s,s,ns,u,2), (s,s,s,s,ns,u,f),$
$,(s,s,s,s,ns,s,s,st), (s,s,s,s,ns,s,s,s), (s,s,s,s,ns,s,s,u,2),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,u,f), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,2), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,2), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,f)\}$

$E_{Ab} = \{(s,s), (s,s,s,s,s), (s,s,s,s,ns),$
$(s,s,s,s,s,s,s), (s,s,s,s,s,s,s,s,s), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w)^7,$
$(s,s,s,s,ns,s,s), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w)^8\}$

$E_{SR} = \{(s,s,u), (s,s,s,s,s,u), (s,s,s,s,s,s,s,u),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u), (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u),$
$(s,s,s,s,ns,u), (s,s,s,s,ns,s,s,u), (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u)\}$

$Z = H \backslash E = \{(w)^4, (s,w)^5, (s,s,st,n), (s,s,st,w)^3,$
$(s,s,st,e)^0, (s,s,s,w)^5, (s,s,u,7)^9, (s,s,u,2,n'),$
$(s,s,u,f,w)^6, (s,s,u,f,n), (s,s,s,s,s,st,n), (s,s,s,s,s,st,w)^3,$
$(s,s,s,s,s,st,e)^0, (s,s,s,s,s,u,7)^9, (s,s,s,s,s,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,s,u,f,n), (s,s,s,s,s,s,w)^8,$
$(s,s,s,s,s,s,s,st,n), (s,s,s,s,s,s,s,st,w)^4, (s,s,s,s,s,s,s,st,e)^0,$
$(s,s,s,s,s,s,s,u,7)^9, (s,s,s,s,s,s,s,u,2,n'), (s,s,s,s,s,s,s,u,f,w)^6,$
$(s,s,s,s,s,s,s,u,f,n), (s,s,s,s,s,s,s,s,w)^8, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,n),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,w)^4, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,st,e)^0,$

$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,7)^9, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,f,e),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,7)^9, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f,w)^6, (s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f,n),$
$(s,s,s,s,ns,st), (s,s,s,s,ns,st,w)^3, (s,s,s,s,ns,st,n),$
$(s,s,s,s,ns,u,7), (s,s,s,s,ns,u,2,n'), (s,s,s,s,ns,u,f,w)^6,$
$(s,s,s,s,ns,u,f,n), (s,s,s,s,ns,s,w)^5, (s,s,s,s,ns,s,s,st,n),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,st,w)^3, (s,s,s,s,ns,s,s,st,e)^0, (s,s,s,s,ns,s,s,u,7)^9,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,u,2,n'), (s,s,s,s,ns,s,s,u,f,n), (s,s,s,s,ns,s,s,u,f,w)^6,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,w)^8, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,n),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,w)^4, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st,e)^0,$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,7)^9, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f,n),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,7)^9, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,2,n'),$
$(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,s,w,u,f,w)^6, (s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,s,w,u,f,n)\}$

$A_{(\emptyset)} = \{w,s\}$
$A_{(s)} = \{w,s\}$
$A_{(s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s)} = \{s,w\}$
$A_{(s,s,s,s)} = \{s,ns\}$
$A_{(s,s,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s)} = \{s,w\}$
$A_{(s,s,s,s,s,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,s,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s)} = \{s,w\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s)} = \{w\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,n,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s)} = \{w,s\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s)} = \{w,s\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,st)} = \{n,w,e\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s)} = \{w\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,2)} = \{n'\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,s,w,u,f)} = \{w,n\}$
$A_{(s,s)} = \{st,u,s\}$
$A_{(s,s,s,s,s)} = \{st,u,s\}$
$A_{(s,s,s,s,ns)} = \{st,u,s\}$

$A_{(s,s,s,s,s,s,s)} = \{st, u, s\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s)} = \{st, u, s\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,w)} = \{u\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s)} = \{st, u, s\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s)} = \{st, u, s\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,w)} = \{u\}$
$A_{(s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,s,s,s,s,s,w,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,u)} = \{7, 2, f\}$
$A_{(s,s,s,s,ns,s,s,s,s,w,u)} = \{7, 2, f\}$

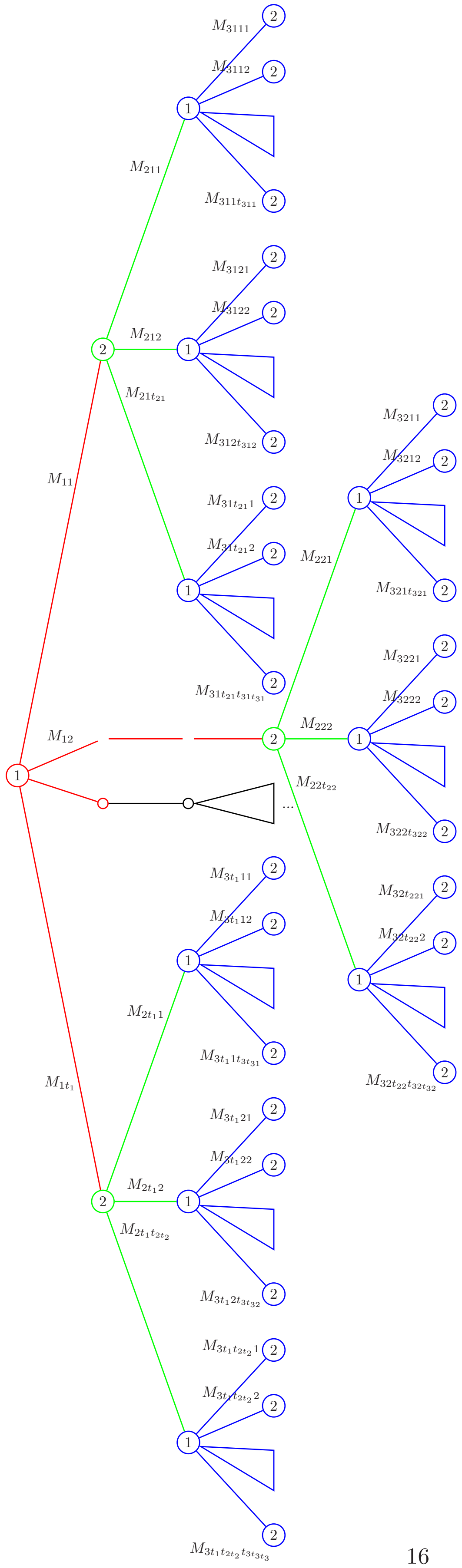
$$|s_1 \times s_2 \times s_3| = |s_1| \cdot |s_2| \cdot |s_3| = \underbrace{3^7 \cdot 2^{17} \cdot 1^{11}}_{286654464} \cdot \underbrace{3^7 \cdot 2^2}_{8748} \cdot \underbrace{3^9}_{19683} = 4,9358 \cdot 10^{16}$$

2.4 Normalform

Umwandlung des Spielbaums in extensiver Form in ein Normalformenspiel durch simultane Züge:
In folgendem Abschnitt werden wir uns mit der Umwandlung des Spielbaums in extensiver Form in die Normalform beschäftigen. Wir kommen dann zu der Schlussfolgerung, daß für große Spielbäume die Schreibarbeit für die Umwandlung in die Normalform zu aufwendig ist, und lernen ein formales Vorgehen kennen, das auf beliebig große Spielbäume angewendet werden kann. Desweiteren werden wir uns nicht nur mit der nicht-reduzierten Normalform sondern auch kurz mit der reduzierten Normalform beschäftigen. Es wird sich herausstellen, dass es sich für große Spielbäume als vorteilhaft erweist, dieses formale Vorgehen in einen Algorithmus umzuwandeln, so daß dann ein PC diese Berechnungen durchführen kann, worauf aber nicht mehr explizit eingegangen werden wird, da dies den Umfang dieses Projekts sprengen würde.

2.4.1 Formales Vorgehen

Generell betrachten wir folgenden Spielbaum:



M_{3111}
M_{3112}
$M_{311t_{311}}$
M_{211}
M_{3121}
M_{3122}
M_{212}
$M_{21t_{21}}$
$M_{312t_{312}}$
M_{11}
$M_{31t_{21}1}$
$M_{31t_{21}2}$
$M_{31t_{21}t_{31t_{31}}}$
M_{3211}
M_{3212}
M_{221}
$M_{321t_{321}}$
M_{3221}
M_{3222}
M_{12}
M_{222}
$M_{22t_{22}}$
$M_{322t_{322}}$
$M_{32t_{221}}$
$M_{32t_{22}2}$
$M_{32t_{22}t_{32t_{32}}}$
$M_{3t_1 11}$
$M_{3t_1 12}$
$M_{2t_1 1}$
$M_{3t_1 1t_{3t_{31}}}$
M_{1t_1}
$M_{3t_1 21}$
$M_{3t_1 22}$
$M_{2t_1 2}$
$M_{2t_1 t_{2t_2}}$
$M_{3t_1 2t_{3t_{32}}}$
$M_{3t_1 t_{2t_2}1}$
$M_{3t_1 t_{2t_2}2}$
$M_{3t_1 t_{2t_2} t_{3t_3 t_3}}$

Die Farbe rot steht für die erste Ebene
Die Farbe grün steht für die zweite Ebene
Die Farbe blau steht für die dritte Ebene

Spielbaum theoretisch
Angenommen wir befinden uns in Ebene k:
Es gilt $\forall k \in \mathbb{Z}$:
$k \geq 1:$
$M_{ki_1^1 i^2_{2i_2^1} i^3_{3i^3_{2i_1^3}} \dots i^k_{ki^k_{(k-1)i^k_{(k-2)i^k_{(k-3)i^k_{\dots 2i_1^k}}}}}} \in \{a_j : (a_1, \dots, a_n) \in H \diagdown \{\varnothing\}, 1 \leq j \leq n, n \geq 1\}$ $(\star)$, wobei:
$1 \leq i_1^1 \leq t_1$
$1 \leq i_2^2 \leq t_{2i_1^2}$
$1 \leq i_1^2 \leq t_2$
$1 \leq i_3^3 \leq t_{3i_2^3 i_1^3}$
$1 \leq i_2^3 \leq t_{3i_1^3}$
$1 \leq i_1^3 \leq t_3$
$\dots$
$1 \leq i_k^k \leq t_{ki^k_{(k-1)} i^k_{(k-2)} i^k_{(k-3)} \dots i_1^k}$
$1 \leq i_{k-1}^k \leq t_{ki^k_{(k-2)} i^k_{(k-3)} i^k_{(k-4)} \dots i_1^k}$
$1 \leq i_{k-2}^k \leq t_{ki^k_{(k-3)} i^k_{(k-4)} i^k_{(k-5)} \dots i_1^k}$
$\dots$
$1 \leq i^k_{(k-(k-2))} \leq t_{ki_1^k}$
$1 \leq i_1^k \leq t_k$, wobei:
$t_1 \geq 1, t_{2t_2} \geq 1, t_2 \geq 1, t_{3t_{3t_3}} \geq 1, t_{3t_3} \geq 1, t_3 \geq 1, \dots,$ $t_{it_{it_{it_{it_i \dots}}}} \geq 1, \dots, t_i \geq 1, i \geq 1$, wobei:
k steht für Ebene k, t_1 gibt die Anzahl der möglichen Strategien in Ebene 1 an, $\sum_{a=1}^{t_2} t_{2a}$ die Anzahl der möglichen Strategien in Ebene 2,...,
$(\sum_{i_{s1}=1}^{t_s} (\sum_{i_{s2}=1}^{t_{st_s}} \dots \sum_{i_{s(s-2)=1}}^{t_{st_{s \dots t_s}}} t_{si_{s1} i_{s2} \dots i_{s,(s-2)}}))$ gibt die Anzahl der möglichen Strategien in Ebene s an.

Um uns diese Formel genauer zu veranschaulichen, betrachten wir für die Ebenen 1,2 und 3 Beispiele:
Sei ein Spielbaum mit beliebig vielen möglichen Strategien in Ebene k,$k \in N$ gegeben:

1. k=1:
   Damit sind $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1t_2}$ die einzig möglichen Strategien, formal: $M_{1i_1^1}, i_1^1 \leq t_1, t_1 \geq 1$.
   Anzahl der Strategien in Ebene 1: $|\{M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1t_1}\}| = \sum_{i=1}^{t_1} 1 = t_1$

2. k=2:
   Damit sind die einzig möglichen Strategien:
   $M_{211}, \dots, M_{21t_{21}},$
   $M_{221}, \dots, M_{22t_{21}},$
   $\dots$
   $M_{2t_1 1}, \dots, M_{2t_1 t_{2t_2}},$
   formal: $M_{2i_1^1 i^2_{2i_1^2}}$, wobei
   $1 \leq i_1^1 \leq t_1, 1 \leq i_2^2 \leq t_{2i_1^2}, 1 \leq i_1^2 \leq t_2$, wobei
   $t_1 \geq 1, t_2 \geq 1, t_{2t_2} \geq 1$

Anzahl der Strategien in Ebene 2: $\sum_{i_{21}=1}^{t_2}(t_{2i_{21}})$

3. k=3:
   Damit sind die einzig möglichen Strategien:
   $M_{3111}, \dots, M_{311t_{311}}$,
   ...,
   $M_{31t_{21}1}, \dots, M_{31t_{21}t_{31t_{31}}}$,

   $M_{3211}, \dots, M_{321t_{321}}$,
   ...,
   $M_{32t_{22}1}, \dots, M_{32t_{22}t_{32t_{32}}}$,

   ...

   $M_{3t_111}, \dots, M_{3t_11t_{3t_31}}$,
   ...,
   $M_{3t_1t_{2t_2}1}, \dots, M_{3t_1t_{2t_2}t_{3t_{3t_3}}}$,
   formal: $M_{3i_1^1 i^2_{2i_1^2} i^3_{3i^3_{2i_1^3}}}$, wobei
   $1 \le i_1^1 \le t_1, 1 \le i_2^2 \le t_{2i_1^2}, 1 \le i_1^2 \le t_2$,
   $1 \le i_3^3 \le t_{3i_2^3}, 1 \le i_2^3 \le t_{3i_1^3}, 1 \le i_1^3 \le t_3$, wobei
   $t_1 \ge 1, t_2 \ge 1, t_{2t_2} \ge 1, t_3 \ge 1, t_{3t_3} \ge 1, t_{3t_{3t_3}} \ge 1$
   Anzahl der Strategien in Ebene 3: $\sum_{i_{31}}^{t_3} \sum_{i_{32}}^{t_{3t_3}} t_{3i_{31}i_{32}}$

Nun müssen wir einen Formalismus angeben, auf welche Weise für beliebig große Spielbäume die Normalform herzustellen ist:
Wir setzen im Vorhinein voraus, dass alle unsere Pfade in unserem Spielbaum voneinander verschieden sind.

1. Verifiziere alle Pfade: $\{(x_1, ..., x_{n_i'}) \in H : i >= 1, n_i' >= 1\}$
   Jedes $x_j, j \in \{1, \dots, n_i' : n_i' >= 1\}$ ist dabei eine Strategie aus ($\star$) für den Spieler 1 bzw. 2

2. Für Spieler 1 und Spieler 2 sind folgende Ebenen zu betrachten:
   k mod 2 = 0: Betrachtung der Strategien in dieser Ebene für Spieler 2
   k mod 2 = 1: Betrachtung der Strategien in dieser Ebene für Spieler 1

3. Formalismus zur Gruppierung der Pfade für die jeweiligen Spieler 1 bzw. 2:
   O.E.d.A. sei Spieler 1 an der Reihe:
   Wir stellen zunaechst fest, dass ein Pfad in unserem Baum festgelegt ist durch:
   $(M_{1k_1^1}, M_{2k_1^1 k^2_{2k_1^2}}, M_{3k_1^1 k^2_{2k_1^2} k^3_{3k^3_{2k_1^3}}}, \dots)$, wobei
   $k_1^1 \ge 1, k^2_{2k_1^2} \ge 1, k_1^2 \ge 1, k^3_{3k^3_{2k_{3_1}}} \ge 1, k^3_{2k_{3_1}} \ge 1, k_1^3 \ge 1 \dots$
   Mit dieser Feststellung versuchen wir nun die Gruppierung wie folgt durchzuführen:
   Sei n die tiefste Ebene in unserem Spielbaum.
   Zunächst müssen wir die Ebene (n-2) betrachten. Verifiziere alle möglichen Strategien in Ebene (n-2) und speichere diese in der Menge K:
   Also $K := \{s := M_{(n-2)k_1^1 k^2_{2k_1^2} \dots k^{(n-2)}_{(n-2)k^{n-2}_{(n-3)k^{n-2} \dots_{2k_1^{n-2} \ge 1}}}} : k_1^1 \ge 1, k^2_{2k_1^2} \ge$

   $1, k_1^2, \dots\}$
   Für jedes $k^* \in K$ prüfe:
   Bestimme die möglichen Stategien in Ebene n-1 wie folgt:

$K'_{k^*} := \{s' := k^*_{k'^{(n-1)}_{(n-1)k'^{n-1}_{(n-2)k'^{n-1}\cdots_{2k_1'^{n-1}}}}} : k_1'^1 >= 1, k'^2_{2k_1'^2}, k_1'^2 \geq 1, \ldots\}$

Durch $k'^{(n-1)}_{(n-1)k'^{n-1}_{(n-2)k'^{n-1}\cdots_{2k_1'^{n-1}}}}$ sind die verschiedenen Zweige in Ebene (n-1) unter Beachtung von k festgelegt:

Dadurch werden auch die Strategien in Ebene n wie folgt bestimmt bzw. gruppiert:

$K''_{s'k^*} := \{s'' := s'_{k''^n_{nk''^n_{(n-1)k''^n\cdots_{2k_1''^n}}}} : k_1''^1 >= 1, k''^2_{2k_1''^2} \geq 1, k_1''^2 \geq 1, \ldots\}$

(a) Enthält nur ein Zweig in Ebene (n-1) Strategien in Ebene n, d.h:
$\exists! m \in K'_{k^*} : K''_{mk^*} \neq \{\varnothing\}$, so wird wie folgt verkettet:
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} := K''_{mk^*}, n \geq 1$
$A_{k^\star} := \{\{k^\star, a_1\}, \{k^\star, a_2\}, \ldots \{k^\star, a_n\}\}$
$k^\star := A_{k^\star}$

(b) Enthält mehr als ein Zweig in Ebene (n-2) Strategien, so wird wie folgt verkettet:
Sei $\{K''_{s(1)}, K''_{s(2)}, \ldots, K''_{s(n)}\} := \{K''_{mk^*} : m \in K'_{k^*}, K''_{mk^*} \neq \{\varnothing\}\}, n \geq 1$:
$k_{1i_1} \in K''_{s_{(1)}}, k_{2i_2} \in K''_{s_{(2)}}, \ldots, k_{n_1 i_n} \in K''_{s_{(n)}}$
$1 \leq i_1 \leq n'_1 := |K''_{s(1)}|$,
$1 \leq i_2 \leq n'_2 := |K''_{s(2)}|$,
$\ldots$,
$1 \leq i_n \leq n'_n := |K''_{s(n)}|$

i. Es gelte:
$\forall m \in \{1, ..., n'\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : |k_{mi_j}| = 1$
Nun bekommen wir folgende Menge:
$A_{k^\star} := \{\{k_{11}, k_{21}, ..., k_{n_1 1}\}, \{k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 2}\},$
$\ldots,$
$\{k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\},$

$\{k_{11}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 1}\},$
$\{k_{11}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 2}\},$
$\ldots,$
$\{k_{11}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\},$

$\ldots$
$\{k_{11}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 1}\},$
$\{k_{11}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 2}\},$
$\ldots,$
$\{k_{11}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\},$

$\{k_{12}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 1}\},$
$\{k_{12}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 2}\},$
$\ldots,$
$\{k_{12}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\},$

$\{k_{12}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 1}\},$
$\{k_{12}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 2}\},$
$\ldots,$
$\{k_{12}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\},$

$\ldots$
$\{k_{12}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 1}\}$,
$\{k_{12}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 2}\}$,
$\ldots$,
$\{k_{12}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\}$,

$\ldots$
$\ldots$
$\ldots$
$\{k_{1n'_1}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 1}\}$,
$\{k_{1n'_1}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 2}\}$,
$\ldots$,
$\{k_{1n'_1}, k_{21}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\}$,

$\{k_{1n'_1}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 1}\}$,
$\{k_{1n'_1}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 2}\}$,
$\ldots$,
$\{k_{1n'_1}, k_{22}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\}$,

$\ldots$
$\{k_{1n'_1}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 1}\}$,
$\{k_{1n'_1}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 2}\}$,
$\ldots$,
$\{k_{1n'_1}, k_{2n'_2}, \ldots, k_{n_1 n'_n}\}\}$,

Anschliessend verketten wir $A_{k^\star}$ mit der übergeordneten Strategie, d.h. wir legen neu fest:
$m^{\star\star} := k^\star$
$a_l \in A_{k^\star}$
$|A_{k^\star}| := n$,
$k^\star := \{k^\star, \{A_{k^\star}\}\} := \{\{m^{\star\star}, a_1\}, \{m^{\star\star}, a_2\}, ..., \{m^{\star\star}, a_n\}\}$

ii. Es gelte:
$\exists m \in \{1, ..., n_1\}, \exists j \in \{1, ..., n\} : |k_{mi_j}| > 1$
Nun verketten wir folgerndermaßen:
Wir definieren: Die Menge $J_h := \{\{k_{hi_j} : |k_{hi_j}| = 1, j \in \{1, ..., n\}\} : h \in \{1, ..., n_1\}\}$
Nun verketten wir alle J_h nach dem gleichen Prinzip wie oben und erhalten eine neue Menge J.
Wir definieren: $S_{tj} := \{\{k_{ti_j} : |k_{ti_j}| > 1, j \in \{1, ..., n\}\} : t \in \{1, ..., n_1\}\}$
Wir verketten nun alle Mengen S_{tj} wie oben und bekommen eine neue Menge S.
Abschließend verketten wir S und M wie oben, erhalten dadurch eine neue Menge W und definieren:
$m^{\star\star} := k^\star$
$k^\star := \{\{m^{\star\star}, w_1\}, \{m^{\star\star}, w_2\}, ..., \{m^{\star\star}, w_{|W|}\}\}, w_i \in W, 1 \leq i \leq |W|$
Da die formale Darlegung extrem zeitaufwendig ist, wurde in diesem Teil unter anderem informal erläutert!

Führe dies für alle $k^\star \in K$ durch!

Nun gehen wir zur Ebene $(n-2)-2$ über.
Wir führen den soeben geschilderten Vorgang wieder für alle k durch.
Nun gehen wir zur Ebene $((n-2)-2)-2$ über.

Wir führen den soeben geschilderten Vorgang wieder für alle k durch.
Wiederhole dieses Prinzip solange, bis alle geraden bzw. ungeradenen Ebenen(-Tiefen) durchgearbeitet sind, d.h. bis wir bei Ebene 2 oder 1 für die jeweiligen Spieler angelangt sind, also keine übergeordnete Ebene mehr existiert.
Am Schluss erhalten wir für Spieler 1 mit $\{M_{11}, M_{12} \ldots, M_{t_1}\}$, wobei $t_1 \geq 1$ die Menge der möglichen Strategien für Spieler 1 bedeutet, unsere Menge, die wir im nächsten Schritt benötigen.
Für Spieler 2 werden in der 2. Ebene nur noch die Elemente verkettet, die ürbgeordnete Strategie wird nicht mehr betrachtet.

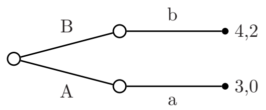
4. Erstelle die Tabelle in Normalform, vertikal sind hierbei die Elemente von Spieler 1 anzubringen, horizontal die Elemente von Spieler 2 oder umgekehrt. Aufgrund der Bedingung an die Pfade, die wir zu Beginn gestellt hatten, kann nun eindeutig der Pfad wie folgt einem bestimmten Tabelleneintrag zugeordnet werden:
Spieler 1 hat $\{\{a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_{k^1}}\}, \{a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_{k^2}}\}, \ldots, \{a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_{k^{q'}}}\}\}, s \geq 1, k^i \geq 1$ Mengen von Mengen von Elementen $i \in \{1, ..., q'\}$
Spieler 2 hat $\{\{b_{1_1}, b_{1_2}, \ldots, b_{1_{n^1}}\}, \{b_{2_1}, b_{2_2}, \ldots, b_{2_{n^2}}\}, \ldots, \{b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_{n^q}}\}\}, j \geq 1, n^i \geq 1$ Mengen von Mengen von Elementen $i \in \{1, ..., q\}, q, q' \geq 1$
Nun muss gelten: $n_i \geq 1, k \in \{k^1, k^2, ..., k^{q'}\}, n \in \{n^1, n^2, ..., n^q\}$
1. Fall: $|\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}| = 1$
$\exists i \in \{1, ..., k\} : x_1 = (a_{i_1}), x_1 \in H$
2. Fall: $|\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}| = |\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\}|$
$\exists i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, a_{i_3}, b_{j_3}, \ldots a_{i_k}, b_{j_n})\}, i, j \geq 1, ((x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) \in H)$.
3. Fall: $|\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}| = |\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\}| + 1$
$\exists i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, a_{i_3}, b_{j_3}, \ldots, a_{i_k})\}, i, j \geq 1, ((x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}) \in H)$.
Aufgrund der geforderten Eigenschaft ergibt sich:
$\exists! i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n'_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, \ldots, a_{i_k}, b_{j_n}), (a_i)\}, i, j \geq 1, n'^i \geq 1$ bzw.
$\exists! i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n'_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, \ldots, a_{i_k}), (a_{i_k})\}, i, j \geq 1, n'^i \geq 1$
Aufgrund der geforderten Eigenschaft ergibt sich:
$\exists! i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n'_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, ..., a_{i_k}, b_{j_n}), (a_i)\}, i, j \geq 1, n'^i \geq 1$ bzw.
$\exists! i \in \{1, ..., k\} : (x_1, ..., x_{n'_i}) \in \{(a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, ..., a_{i_k}), (a_i)\}, i, j \geq 1, n'^i \geq 1$

Insgesamt ergibt sich die **Normalform**
Um eine nicht **reduzierte Normalform** mit dem eben erwähntem Vorgehen zur Umwandlung in ein Normalformenspiel zu erhalten, ist wie folgt vorzugehen:
Feststellung: Wir finden heraus, ob ein Spielbaum mit dem eben erwähntem Vorgehen zur Umwandlung in ein Normalformenspiel schon eine reduzierte Normalform ergibt:
Es ist wie folgt vorzugehen:
Betrachte einen Pfad $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$:
Nun schauen wir uns alle Pfade an, die folgendermaßen ausschauen:
$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) \in H$, und bei denen ein Payoff existiert
Wir nehmen o.E.d.A. an, dass die Menge Y alle Strategien enthält, für die gilt:
$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y') \in H, y' \in Y$
Gilt nun:
$\exists y' \in Y$: payoff:$= u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y')$
$\forall y' \in Y : u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y')$ =payoff,
d.h. haben all diese Pfade den gleichen Payoff, so entsteht der neue Spielbaum wie

folgt:
$H \diagdown \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y') \in H, y' \in Y\} \cup \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ und $u(x_1, ..., x_{n-1})$:=payoff
Desweiteren bezeichne nun Y die Menge aller Teil-Pfade, die von Ebene n aus weiterverlaufen, d.h.
$(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, ..., y_n) \in H, n \geq 1$, und $(y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n) \in Y$
Um nun alle Pfade der Form $(x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, ..., y_n) \in H, n \geq 1$ durch $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ in der Menge H zu ersetzen, muss Folgendes gelten:
$\exists z \in Y : z' := u(x_1, x_2, \dots, x_k, z) \in H, n \geq 1$ und es gilt:
$\forall z \in Y : (x_1, x_2, \dots, x_k, z) \in H, n \geq 1$ gilt:
$u(x_1, x_2, \dots, x_k, z) = z'$, d.h.
alle Payoffs, die durch Ergänzen des Teil-Pfades $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ existieren, müssen dieselben Paare von Zahlen beinhalten.
Führe diese Erkenntnis für alle Pfade durch, und es ergibt sich ein Spielbaum in extensiver Form, der mit obigem Algorithmus in ein Normalformenspiel umgewandelt werden kann, und dies liegt dann in reduzierter Normalform vor.
Verändert sich der Spielbaum durch den eben geschilderten Vorgang nicht, so liegt bereits unter Anwendung des eben erwähntem Vorgehen zur Umwandlung in ein Normalformenspiel eine reduzierte Normalform vor.

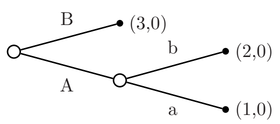
Wir wiederholen kurz die **Definition** eines **Normalformenspiels**:
Definition
Ein Spiel in Normalform besteht aus:
a) $Z = \{1, \dots, N\}$ ist eine endliche Menge von Spielern, $N > 1$
b) $\forall i \in Z$ ist die Menge der reinen Strategien durch $S_i \neq \{\varnothing\}$ gegeben
c) $\forall i \in Z$ ist eine Nutzenfunktion $u_i : S \to \mathbb{R}$ gegeben, unter Beachtung des Strategieraumes $S := \prod_{i=1}^{N} S_i$

Als Erstes wollen wir uns anhand von Beispielen vergegenwärtigen, wie diese Normalform zustande kommt, desweiteren werden wir verstehen, warum sich für größere Spielbäume ein formales Vorgehen für dieses Problem als unabdingbar erweist.



Wir stellen fest, Spieler 2 hat in diesem Spielbaum in extensiver Form zwei Strategien zur Auswahl, diese sind A und B. Da die Normalform durch 'gleichzeitiges' Entscheiden der Strategien des Spieler 2 zustande kommt, bekommen wir als Strategie für unser Normalformenspiel:
$S_2 = \{(a, b)\}$ Für Spieler 1 erhalten wir, da dieser beim ersten Zug sich entscheidet, welchen Zweig er wählt:
$S_1 = \{A, B\}$
Dies ergibt folgende Tabelle in Normalform:

Spieler 1 / Spieler 2	A	B
(a,b)	(3,0)	(4,2)

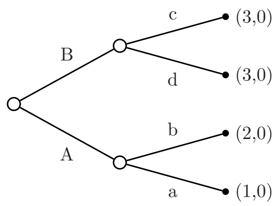


Spieler 1 hat die Strategien A,B, d.h. $S_1 = \{A, B\}$
Spieler 2 hat die Strategien a,b im Falle, daß Spieler 1 die Strategie A wählt, also:
$S_2 = \{a, b\}$

Die Tabelle für das Normalformenspiel lautet nun:

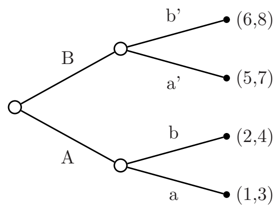
Spieler 1 / Spieler 2	A	B
a	(1,0)	(3,0)
b	(2,0)	(3,0)

Dieser Spielbaum liegt in reduzierter Normalform vor, um einen Spielbaum in nicht reduzierter Normalform zu erhalten, müssen wir wie folgt ergänzen:



Hierbei mussten wir im Falle, dass Spieler 1 die Strategie A wählt, unseren Spielbaum mit den gleichen Strategien für Spieler 2 ergänzen, wie im Falle, dass Spieler 1 die Strategie B wählt.
Nun müssen wir wie bereits in unserer formalen Vorgehensweise erwähnt, folgendermaßen für Spieler 2 in der 2. Ebene verketten:
Wir verketten die Strategien für Spieler 2 unter der Bedingung, daß Spieler 1 die Strategie unterbrechen gewählt hat, mit zwei neuen Strategien für Spieler 2 unter der Bedingung (wobei die Payoffs gleich bleiben), daß Spieler 1 die Strategie spielen gewählt hat:
$S_2 = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$
$S_1 = \{A,B\}$
Also lautet die Tabelle für das Normalformenspiel:

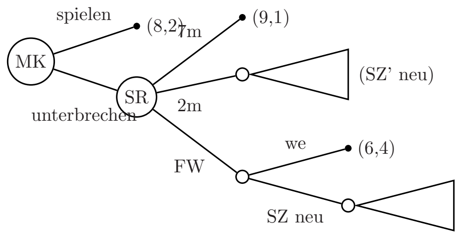
Spieler 1 / Spieler 2	A	B
(a,c)	(1,0)	(3,0)
(a,d)	(1,0)	(3,0)
(b,c)	(2,0)	(3,0)
(b,d)	(2,0)	(3,0)



Für Spieler 2 erhalten wir durch 'gleichzeitiges' Entscheiden die Menge:
$S_2 = \{(a,a'),(a,b'),(b,a'),(b,b')\}$
Spieler 1 bleibt wie bereits für den vorigen Spielbaum geschildert:
$S_1 = \{A,B\}$
Dies ergibt folgende Tabelle in Normalform:

Spieler 1 / Spieler 2	A	B
(a,a')	(1,3)	(5,7)
(a,b')	(1,3)	(6,8)
(b,a')	(2,4)	(5,7)
(b,b')	(2,4)	(6,8)

2.4.2 Anwendung auf Handball-Spielbaum mittels eines Beispiels



Wir legen im Folgenden fest, daß (.,.) ein Paar an konstanten Zahlen ist (in unserem Spielbaum ist dies ein unendlicher Teil-Spielbaum).
$Z = \{1, 2\}$, da in unserem Spiel die 2 Mannschaften als unsere Spieler charakterisiert werden.
$S_1 = \{$(FW-SZ neu),(FW-we),(2m-SZ' neu),(7m)$\}$
$S_2 = \{$u,s $\}$

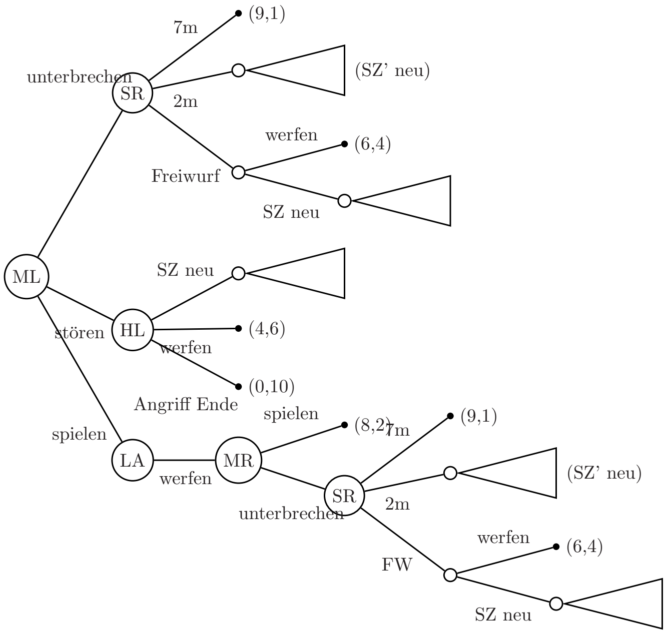
Tabelle 1: Normalform

Spieler 1 / Spieler 2	u	s
(FW-SZ neu)	(.,.)	(8,2)
(FW-we)	(6,4)	(8,2)
(2m-SZ' neu)	(.,.)	(8,2)
(7m)	(9,1)	(8,2)

Anhand der Tabelle ist bereits auch die Größe ersichtlich:
Die Matrix in Normalform hat die Groesse: 3×2, da Spieler 1 3 Strategien und Spieler 2 2 Strategien zur Auswahl hat.
Desweiteren schauen wir uns hier noch kurz explizit die Auszahlungsfunktion an:
Es gilt:
$u_1((FW - SZneu), u) = .$
$u_2((FW - SZneu), u) = .$
$u_1((FW - SZneu), s) = 8$
$u_2((FW - SZneu), s) = 2$
$u_1((FW - we), u) = 6$
$u_2((FW - we), u) = 4$
$u_1((FW - we), s) = 8$
$u_2((FW - we), s) = 2$
$u_1((2m - SZ'neu), u) = .$
$u_2((2m - SZ'neu), u) = .$
$u_1((2m - SZ'neu), s) = 8$
$u_2((2m - SZ'neu), s) = 2$
$u_1((7m), u) = 9$
$u_2((7m), u) = 1$
$u_1((7m), s) = 8$

$u_2((7m), s) = 2$

Als Nächstes betrachten wir nun ein etwas aufwendigeres Beispiel für die Umformung in Normalform:
Wir überlegen uns hier bereits im Voraus, wie groß unsere Matrix in Normalform werden muss.



Hierzu stellen wir fest:
$Z = \{1, 2\}$, da in unserem Spiel die 2 Mannschaften als unsere Spieler charakterisiert werden.
Sollte nachdem ein Spieler sich für eine Strategie entschieden hat, der Schiedsrichter an der Reihe sein und sich für eine Strategie entschieden haben, so werden diese beiden Strategien in dem Normalformenspiel als eine Strategie bewertet.
Spieler 1 hat 3 Strategien in Ebene 1 und 2 Strategien in Ebene 3, insgesamt ergibt sich also aufgrund 'simultanen Entscheidens':
$3 \cdot 2 = 6$ Strategien für Spieler 1 in Normalform.
Insgesamt ergibt sich damit für Spieler 2 aufgrund simultanen Entscheidens: $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ Strategien in Normalform.

S_1 = { ((w,FW-SZ neu),(Angr),(FW-SZ neu)),
((w,FW-SZ neu),(Angr),(FW-w)),
((w,FW-SZ neu),(Angr),(2m-SZ' neu)),
((w,FW-SZ neu),(Angr),(7m)),
((w,FW-SZ neu),(w),(FW-SZ neu)),
((w,FW-SZ neu,(w),(FW-w)),
((w,FW-SZ neu,(w),(2m-SZ' neu)),
((w,FW-SZ neu,(w),(7m)),
((w,FW-SZ neu,(SZ neu),(FW-SZ neu))),
((w,FW-SZ neu,(SZ neu),(FW-w))),
((w,FW-SZ neu,(SZ neu),(2m-SZ' neu))),
((w,FW-SZ neu,(SZ neu),(7m))),
((w,FW-w),(Angr),(FW-SZ neu)),
((w,FW-w),(Angr),(FW-w)),

((w,FW-w),(Angr),(2m-SZ' neu)),
((w,FW-w),(Angr),(7m)),
((w,FW-w),(w),(FW-SZ neu)),
((w,FW-w,(w),(FW-w)),
((w,FW-w,(w),(2m-SZ' neu)),
((w,FW-w,(w),(7m)),
((w,FW-w,(SZ neu),(FW-SZ neu))),
((w,FW-w,(SZ neu),(FW-w))),
((w,FW-w,(SZ neu),(2m-SZ' neu))),
((w,FW-w,(SZ neu),(7m))),
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(FW-SZ neu)),
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(FW-w)),
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(2m-SZ' neu)),
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(7m)),
((w,2m-SZ' neu),(w),(FW-SZ neu)),
((w,2m-SZ' neu,(w),(FW-w)),
((w,2m-SZ' neu,(w),(2m-SZ' neu)),
((w,2m-SZ' neu,(w),(7m)),
((w,2m-SZ' neu,(SZ neu),(FW-SZ neu))),
((w,2m-SZ' neu,(SZ neu),(FW-w))),
((w,2m-SZ' neu,(SZ neu),(2m-SZ' neu))),
((w,2m-SZ' neu,(SZ neu),(7m))),
((w,7m),(Angr),(FW-SZ neu)),
((w,7m),(Angr),(FW-we)),
((w,7m),(Angr),(2m-SZ' neu)),
((w,7m),(Angr),(7m)),
((w,7m),(w),(FW-SZ neu)),
((w,7m),(w),(FW-we)),
((w,7m),(w),(2m-SZ' neu)),
((w,7m),(w),(7m)),
((w,7m),(SZ neu),(FW-SZ neu)),
((w,7m),(SZ neu),(FW-w)),
((w,7m),(SZ neu),(2m-SZ' neu)),
((w,7m),(SZ neu),(7m))
}

$S_2 = \{$ (s,u),(s,s),(st),(u)$\}$

Um eine Normalform zu erhalten, ist Folgendes zu beachten.
Wir wenden unseren Formalismus auf diesen Spielbaum an:
Zunächst bemerken wir nochmal:
Eine Strategie in Ebene q,$q \geq 1$, ist festgelegt durch:
$M_{qk^n_{nk^n_{(n-1)k^n_{(n-2)\dots_{2k^n_1}}}}} \in \{a_j : (a_1, \dots, a_n) \in H \diagdown \{\varnothing\}$, wobei
$k^1_1 \geq 1, k^2_{2k^2_1} \geq 1, k^2_1 \geq 1, k^3_{3k^3_{2k_{3_1}}} \geq 1, k^3_{2k_{3_1}} \geq 1, k^3_1 \geq 1 \dots$

Wenn wir von einem Vorgänger der Strategie in Ebene q reden, beziehen wir uns auf die Ebene q-1, und dieser ist festgelegt durch die Strategie:
$M_{(q-1)k^{(n-1)}_{(n-1)k^{(n-1)}_{(n-2)k^{(n-1)}_{(n-3)\dots_{2k^{(n-1)}_1}}}}} \in \{a_j : (a_1, \dots, a_n) \in H \diagdown \{\varnothing\}$

Weiterhin erhalten wir:

M_{11}:=spielen
M_{12}:=stören
M_{13}:=unterbrechen

M_{211}:=werfen

M_{221}:=Angriff Ende
M_{222}:=werfen
M_{223}:= SZ neu

M_{231}:=FW-SZ neu
M_{232}:=FW-werfen
M_{233}:=2m-SZ'neu
M_{234}:=7m

M_{3111}:=unterbrechen
M_{3112}:=spielen

M_{41111}:=FW-SZ neu
M_{41112}:=FW-werfen
M_{41113}:=2m-SZ' neu
M_{41114}:=7m

Ein Pfad ist z.B. gegeben durch:
(spielen, werfen,unterbrechen)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3111}) \in H$

1. Verifiziere alle Pfade:
   (spielen,werfen,unterbrechen,FW-SZ neu)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3111}, M_{41111})$
   (spielen,werfen,unterbrechen,FW-werfen)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3111}, M_{41112})$
   (spielen,werfen,unterbrechen,2m-SZ'neu)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3111}, M_{41113})$
   (spielen,werfen,unterbrechen,7m)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3111}, M_{4114})$
   (spielen,werfen,spielen)=$(M_{11}, M_{211}, M_{3112})$
   (stören,Angriff Ende)=(M_{12}, M_{221})
   (stören,werfen)=(M_{12}, M_{222})
   (stören,SZ neu)=(M_{12}, M_{223})
   (unterbrechen,FW-SZ neu)=(M_{13}, M_{231})
   (unterbrechen,FW-werfen)=(M_{13}, M_{232})
   (unterbrechen,2m-SZ' neu)=(M_{13}, M_{233})
   (unterbrechen,7m)=(M_{13}, M_{234})

2. Für Spieler 1 und Spieler 2 sind folgende Ebenen zu betrachten:
   $k \geq 1, k \in N$, k ist Ebene im Spielbaum in extensiver Form.
   k mod 2 = 0: Betrachtung der Strategien in dieser Ebene fuer Spieler 2, also die Ebenen: 2,4
   k mod 2 = 1: Betrachtung der Strategien in dieser Ebene fuer Spieler 1, also die Ebenen: 1,3

3. Formalismus zur Gruppierung der Pfade für die jeweiligen Spieler 1 bzw. 2:
   Hierbei beobachten wir zunächst, wie wir für Spieler 2 unsere Gruppierungen festlegen können. Nach Anwendung des Formalismus bekommen wir:
   Die Zweige $M_{41111}, M_{41112}, M_{41113}, M_{41114}$ haben als Vorgänger den Zweig M_{3111}, denn:
   Seien die Elemente aus Z von der Form M_{4abcd} mit $a, b, c, d \geq 1$, so muss

gelten:
Diese Zweige haben als Vorgänger: M_{3abc}, und das ist hier für M_{3111} der Fall. Schon haben wir unsere erste Gruppierung gefunden. Da dies schon alle Strategien in der Ebene 4 waren, sind wir fertig.
Nun müssen wir die Elemente verketten:
Wir wissen: Der Zweig M_{3111} hat als Vorgänger M_{211}, da wieder gilt: M_{3abc} hat als Vorgänger M_{2ab}, $a, b, c \geq 1$.
Es folgt:
$A_{M_{211}} = \{\{M_{211}, M_{41111}\}, \{M_{211}, M_{41112}\}, \{M_{211}, M_{41113}\}, \{M_{211}, M_{41114}\}\}$
Als nächstes betrachten wir die Ebene 2:
Wir definieren: $M_{211} := A_{M_{211}}$
Wir müssen nun die Elemente M_{211} mit $B := \{M_{221}, M_{222}, M_{223}\}$ und $C := \{M_{231}, M_{232}, M_{233}, M_{234}\}$ nach folgendem Prinzip verketten:
Bezeichne A_i das i-te Element aus $A := A_{M_{211}}$, B_j das j-te Element aus B und C_k das k-te Element aus i:
Z:=$\{\{A_1, B_1, C_1\}, \{A_1, B_1, C_2\}, \{A_1, B_1, C_3\}, \{A_1, B_1, C_4\},$
$\{A_1, B_2, C_1\}, \{A_1, B_2, C_2\}, \{A_1, B_2, C_3\}, \{A_1, B_2, C_4\},$
$\{A_1, B_3, C_1\}, \{A_1, B_3, C_2\}, \{A_1, B_3, C_3\}, \{A_1, B_3, C_4\},$
$\{A_2, B_1, C_1\}, \{A_2, B_1, C_2\}, \{A_2, B_1, C_3\}, \{A_1, B_1, C_4\},$
$\{A_2, B_2, C_1\}, \{A_2, B_2, C_2\}, \{A_2, B_2, C_3\}, \{A_1, B_2, C_4\},$
$\{A_2, B_3, C_1\}, \{A_2, B_3, C_2\}, \{A_2, B_3, C_3\}, \{A_1, B_3, C_4\},$
$\{A_3, B_1, C_1\}, \{A_3, B_1, C_2\}, \{A_3, B_1, C_3\}, \{A_1, B_1, C_4\},$
$\{A_3, B_2, C_1\}, \{A_3, B_2, C_2\}, \{A_3, B_2, C_3\}, \{A_1, B_2, C_4\},$
$\{A_3, B_3, C_1\}, \{A_3, B_3, C_2\}, \{A_3, B_3, C_3\}, \{A_1, B_3, C_4\},$
$\{A_4, B_1, C_1\}, \{A_4, B_1, C_2\}, \{A_4, B_1, C_3\}, \{A_4, B_1, C_4\},$
$\{A_4, B_2, C_1\}, \{A_4, B_2, C_2\}, \{A_4, B_2, C_3\}, \{A_4, B_2, C_4\},$
$\{A_4, B_3, C_1\}, \{A_4, B_3, C_2\}, \{A_4, B_3, C_3\}, \{A_4, B_3, C_4\}\}$
Dies ergibt die Strategien für Spieler 1.
Zum Beispiel ist: (A_1, B_1, C_1)= ((w,FW-SZ neu), Angr, FW-SZ neu)) oder (A_3, B_3, C_2)= ((w,2m-SZ' neu), SZ neu, FW-w)

Nun werden für Spieler 1 unsere Gruppierungen festlegt.
Wir stellen fest: In Ebene 3 hat Spieler 1 die Strategien M_{3111}, M_{3112} zur Auswahl.
Da dies die einzigen Strategien in Ebene 3 sind, versuchen wir den Vorgänger zu finden:
Es gilt: M_{3abc} hat als Vorgänger $M_{2ab}, a, b, c \geq 1$. Es folgt:
M_{211} ist der Vorgänger. Daraus erhalten wir wie eben wieder als Vorgänger: M_{11}. Also verketten wir wie folgt: $(M_{11}, M_{3111}), (M_{11}, M_{3112})$. Da die beiden anderen Strategien M_{12}, M_{13} keinen weiteren Nachfolger haben, erhalten wir:
D:=$\{\{M_{11}, M_{3111}\}, \{M_{11}, M_{3112}\}, \{M_{12}\}, \{M_{13}\}\}$

4. Erstelle die Tabelle in Normalforn, vertikal sind hierbei die Elemente von Spieler 2 anzubringen, horizontal die Elemente von Spieler 1.
   Nun erläutern wir noch kurz, wie wir nun einen Pfad in unserem Spielbaum finden:
   Betrachte die Menge Z und die Menge A.
   Sei $x_j \subset \{x_1, \ldots, x_n\} := x \in Z, n \geq 1, 1 \leq j \leq n$
   Sei $y_i \subset \{y_1, \ldots, y_n'\} := y \in D, n' \geq 1, 1 \leq i \leq n'$
   Es gilt: $\{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}\} := x_j, n \geq 1$ sowie
   $\{y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n'}\} := y_i, n' \geq 1$
   Nun müssen wir verifizieren:

(a) Ist $|x_j| = 1$, so suche Payoff $u(x_{j_n})$ und schreibe diesen in die Tabelle für jede Strategie von Spieler 2, falls dieser Payoff existiert.

(b) Ist $|x_j| > 1$:

i. Ist $|y_i| = |x_j|$, so suche Payoff:
$u(x_{11}, y_{11}, x_{12}, y_{12}, \ldots, x_{1n}, y_{1n})$
Existiert dieser Payoff nicht, so schreibe keinen Wert in die entsprechende Zelle.

ii. Ist $|y_i| = |x_j| - 1$, so suche Payoff:
$u(x_{11}, y_{11}, x_{12}, y_{12}, \ldots, x_{1n})$
Existiert dieser Payoff nicht, so schreibe keinen Wert in die entsprechende Zelle.

iii. Die Bedingungen b)i) und b)ii) sind nicht erfüllt:
Beginne mit dem nächsten Element aus Z bzw. A bis alle Elemente aus Z überprüft wurden.
Dann existiert ein Payoff, der in die entsprechende Zelle geschrieben wird.
Wir zeigen noch kurz exemplarisch, wie b),b)i)),b)ii),b)iii) angewendet werden:
Wir nehmen uns aus der Menge Z das Element $s_1 := \{$ w,FW-SZ neu $\}$ heraus.
Weiterhin nehmen wir uns aus der Menge A das Element $s_2 := \{s, u\}$ heraus.
Nun beginnen wir zu überprüfen:
Suche Payoff: u(s,w,u,FW-SZneu) (*) in dem Spielbaum in extensiver Form, dieser existiert.
Nun bekommen wir für unsere Auszahlungsfunktion in unserem Normalformenspiel:
(a,b):=u(s,w,u,FW-SZneu)=(.,.), $a, b \in \mathbb{R}$
Es ergibt sich also:
$u_1((s, u), (w, FW - SZneu)) = a$,
$u_1((s, u), (w, FW - SZneu)) = b$,
Suche Payoff: u(s,Angr,u), dieser existiert nicht.
Suche Payoff: u(s,FW-SZ neu,u), dieser existiert nicht.
In die entsprechende Zelle wird nun der Payoff (*) eingefügt.

Tabelle 2: reduzierte Normalform

Spieler 1 / Spieler 2	(s,u)	(s,s)	(st)	(u)
((w,FW-SZ neu),(Angr),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,FW-SZ neu),(Angr),(FW-we))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(6,4)
((w,FW-SZ neu),(Angr),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,FW-SZ neu),(Angr),(7m))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(9,1)
((w,FW-SZ neu),(we),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,FW-SZ neu,(we),(FW-we))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(6,4)
((w,FW-SZ neu,(we),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,FW-SZ neu,(we),(7m))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(9,1)
((w,FW-SZ neu),(SZ-neu),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,FW-SZ neu,(SZ-neu),(FW-we))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(6,4)
((w,FW-SZ neu,(SZ-neu),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(.,.)

Weiter auf der nächsten Seite

Spieler 1 / Spieler 2	(s,u)	(s,s)	(st)	(u)
((w,FW-SZ neu,(SZ-neu),(7m))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(9,1)
((w,FW-w),(Angr),(FW-SZ neu))	(6,4)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,FW-w),(Angr),(FW-w))	(6,4)	(8,2)	(0,10)	(6,4)
((w,FW-w),(Angr),(2m-SZ' neu))	(6,4)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,FW-w),(Angr),(7m))	(6,4)	(8,2)	(0,10)	(9,1)
((w,FW-w),(w),(FW-SZ neu))	(6,4)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,FW-w,(w),(FW-w))	(6,4)	(8,2)	(4,6)	(6,4)
((w,FW-w,(w),(2m-SZ' neu))	(6,4)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,FW-w,(w),(7m))	(6,4)	(8,2)	(4,6)	(9,1)
((w,FW-w),(SZ-neu),(FW-SZ neu))	(6,4)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,FW-w,(SZ-neu),(FW-w))	(6,4)	(8,2)	(.,.)	(6,4)
((w,FW-w,(SZ-neu),(2m-SZ' neu))	(6,4)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,FW-w,(SZ-neu),(7m))	(6,4)	(8,2)	(.,.)	(9,1)
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(FW-w))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(6,4)
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu),(Angr),(7m))	(.,.)	(8,2)	(0,10)	(9,1)
((w,2m-SZ' neu),(w),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu,(w),(FW-w))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(6,4)
((w,2m-SZ' neu,(w),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu,(w),(7m))	(.,.)	(8,2)	(4,6)	(9,1)
((w,2m-SZ' neu),(SZ-neu),(FW-SZ neu))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu,(SZ-neu),(FW-w))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(6,4)
((w,2m-SZ' neu,(SZ-neu),(2m-SZ' neu))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,2m-SZ' neu,(SZ-neu),(7m))	(.,.)	(8,2)	(.,.)	(9,1)
((w,7m neu),(Angr),(FW-SZ neu))	(9,1)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,7m neu),(Angr),(FW-w))	(9,1)	(8,2)	(0,10)	(6,4)
((w,7m neu),(Angr),(2m-SZ' neu))	(9,1)	(8,2)	(0,10)	(.,.)
((w,7m neu),(Angr),(7m))	(9,1)	(8,2)	(0,10)	(9,1)
((w,7m neu),(w),(FW-SZ neu))	(9,1)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,7m neu,(w),(FW-w))	(9,1)	(8,2)	(4,6)	(6,4)
((w,7m neu,(w),(2m-SZ' neu))	(9,1)	(8,2)	(4,6)	(.,.)
((w,7m neu,(w),(7m))	(9,1)	(8,2)	(4,6)	(9,1)
((w,7m neu),(SZ-neu),(FW-SZ neu))	(9,1)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,7m neu,(SZ-neu),(FW-w))	(9,1)	(8,2)	(.,.)	(6,4)
((w,7m neu,(SZ-neu),(2m-SZ' neu))	(9,1)	(8,2)	(.,.)	(.,.)
((w,7m neu,(SZ-neu),(7m))	(9,1)	(8,2)	(.,.)	(9,1)

2.4.3 Verallgemeinerung

Anhand von den bisherigen Beispielen wird ersichtlich wie schnell hier die Größe der Tabelle für das Normalformenspiel ansteigt, daher ist es auch nicht möglich diesen ganzen Spielbaum in extensiver Form in ein Normalformenspiel umzuwandeln.
Der schnelle Anstieg der Größe der Tabelle resultiert aus dem Grund, dass die Strategien wie bereits geschildert in jeder Ebene des Spielbaums miteinander verkettet werden müssen, und dadurch die Anzahl der Strategien für das Normalformenspiel sehr schnell ansteigen.
Abschliessend halten wir noch einmal fest:
Ein großer Spielbaum in extensiver Form ist problematisch in ein Normalformenspiel umzuwandeln, da hierfür extrem große Tabellen durch

die Verkettung der einzelnen Elemente des Baumes (siehe 'formales Vorgehen') benötigt werden.
Ein Ausweg findet sich in der Anwendung eines PC's, der die Berechnungen dann automatisch durchführt.
Ein möglicher Ansatz zur Implementierung eines Algorithmus ist durch eine formales Vorgehen bereits gegeben worden.

2.5 Dominanzen

Ausgangssituation:
Jedes Spiel in extensiver Form besitzt eine Normalform. Da es sich bei unserem Projekt auch um ein Beispiel eines extensiven Spiels handelt, gibt es nach Vorlesung nur die Möglichkeit die dominanten Strategien dieses Spiels mit Hilfe der Normalform zu finden (siehe Affenspiel aus der Vorlesung). Um die Dominanzen zu ermitteln benötigt man also wie beim Normalformenspiel eine Nutzenfunktion, die in unserem Beispiel durche eine Auszahlungsfunktion dargestellt wird.
Dies führt nun zu folgender Berechnung:
Dominante Strategien:

1. Spieler 1: Angreifende Mannschaft:
   • (M),werfen: $u_1 = 4$
   • **(M,HL),werfen:** $u_1 = 5$
   ⇒ Für die angreifende Mannschaft ist es geringfügig besser den Ball zu Beginn des Spielzuges an den Halblinks abzugeben.
   • (M,HL,RA,stören,LA),werfen: $u_1 = 3$
   (M,HL,RA,stören,LA),Angriff Ende: $u_1 = 0$
   • **(M,HL,RA,spielen,LA),werfen:** $u_1 = 5$
   ⇒ Die beste Strategie für die angreifende Mannschaft ist in diesem Fall (M,HL,RA,spielen,LA),werfen mit Nutzen 5, d.h. Mannschaft 1 muss versuchen möglichst ohne gegnerische Störung ein Tor zu erzielen. Zudem muss sie darauf achten, dass es dem Gegner nicht gelingt den Angriff zu beenden.
   • (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR, stören,M),werfen: $u_1 = 3$
   (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR, stören,M),Angriff Ende: $u_1 = 0$
   • **(M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen, MR,spielen,M),werfen:** $u_1 = 8$
   ⇒ Falls die angreifende Mannschaft möglichst frei zum Tor steht (ohne nennenswerte gegnerische Störung), lässt sich für sie ein maximaler Erfolg erzielen (s.o.) ((M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M),werfen: $u_1 = 8$).
   • **(M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M,RA,spielen,HL),werfen:** $u_1 = 8$
   • (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M, RA,spielen,HL,ML,stören,HL),werfen: $u_1 = 4$
   (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M, RA,spielen,HL,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_1 = 0$
   • (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M, RA,spielen,HL,ML,spielen,LA,MR),werfen: $u_1 = 7$
   • (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M, RA,stören,HL,ML,stören,HL),werfen: $u_1 = 4$
   (M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M, RA,stören,HL,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_1 = 0$
   ⇒ Auch hier lässt sich folgendes feststellen:
   Diejenigen Strategien, die kaum durch Eingreifen des Gegners gekennzeichnet sind ('stören') sind dominant und ergeben somit die höchsten Payoffs

((M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M,RA,spielen,HL),werfen: $u_1 = 8$).
Auch die Strategie
(M,HL,RA,spielen,LA,K,spielen,MR,spielen,M,RA,spielen,HL,ML,spielen,LA,MR), werfen: $u_1 = 7$ ist nicht wesentlich schlechter gestellt als obige Strategie, die zu einer Auszahlung von 8 führt. Jedoch scheint sich dabei der längere Weg des Balles zum Tor auszuwirken. Je mehr der Gegner schließlich in das Spiel der Mannschaft 1 eingreifen kann (schlimmstenfalls, in dem er den Angriff beendet, es also keine Anspielmöglichkeit mehr für die Angreifer gibt bzw. die Wurfposition aussichtslos ist), desto geringer ist der Nutzen für diese.
• (M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,stören,M),werfen: $u_1 = 3$
(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,stören,M),Angriff Ende: $u_1 = 0$
• **(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen,M),werfen:** $u_1 = 5$
⇒ Hier ist aus bereits erwähnten Gründen die Strategie (M,HL,RA,spielen,LA, K,nicht spielen,MR,spielen,M),werfen: $u_1 = 5$) dominant.
• **(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen,M,RA,spielen, HL),werfen:** $u_1 = 8$
• (M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen, M,RA,spielen,HL,ML,stören), werfen: $u_1 = 4$
(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen, M,RA,spielen,HL,ML,stören), Angriff Ende: $u_1 = 0$
• **(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen, M,RA,spielen, HL,ML,spielen,LA),werfen:** $u_1 = 8$
• (M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR, spielen,M,RA,stören,HL),werfen: $u_1 = 3$
(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR, spielen,M,RA,stören,HL),Angriff Ende: $u_1 = 0$
⇒ Die Strategien
(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen,M,RA,spielen,HL,ML,spielen, LA),werfen: $u_1 = 8$ und
(M,HL,RA,spielen,LA,K,nicht spielen,MR,spielen,M,RA,spielen,HL),werfen: $u_1 = 8$ sind aufgrund obiger Überlegungen dominant.

2. Spieler 2: Abwehrende Mannschaft:
• (M),werfen: $u_2 = 6$
•(M,HL),werfen: $u_2 = 5$
⇒ Für die abwehrende Mannschaft ist es besser, wenn der Gegner sofort (mit Beginn des Spielzuges) wirft.
• (M,HL,RA,stören,LA),werfen: $u_2 = 7$
(M,HL,RA,stören,LA),Angriff Ende: $u_2 = 10$
• (M,HL,RA,spielen,LA),werfen: $u_2 = 5$
⇒ dominierend ist die Strategie (M,HL,RA,stören,LA), die zum Ende des Angriffs führt, da sie eine höhere Auszahlung für Spieler 2 bewirkt als die anderen beiden, wobei 'stören' klar 'spielen' (d.h. Weitergabe des Balles an einen Mitspieler) dominiert.
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,stören,M) werfen: $u_2 = 7$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,stören,M),Angriff Ende: $u_2 = 10$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen, MR,spielen,M),werfen: $u_2 = 2$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen, MR,spielen,M),werfen: $u_2 = 5$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen, MR,stören,M),werfen: $u_2 = 7$

(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen, MR,stören,M),Angriff Ende: $u_2 = 10$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen, MR,spielen,M),werfen: $u_2 = 5$
⇒ dominierend sind die Strategien (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR, stören,M) und (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,stören,M), die beide zum Ende des Angriffs führen, da sie eine höhere Auszahlung für Spieler 2 bewirken als die anderen drei, wobei 'stören' wiederum klar 'spielen' dominiert. Zudem ergibt sich auch, falls sich Spieler 2 auf 'stören' festgelegt hat, durch Beenden des Angriffs von Spieler 1 eine höhere Auszahlung für die abwehrende Mannschaft als durch Fortsetzung (Spielenlassen) des gegnerischen Angriffs.
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen,RA,spielen,HL), werfen: $u_2 = 2$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,spielen,HL, spielen,ML,stören,HL),werfen: $u_2 = 6$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA, spielen,HL,spielen,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,spielen, HL,spielen,ML,spielen,LA,werfen,MR),werfen: $u_2 = 3$
•(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,stören,HL), werfen: $u_2 = 6$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,stören, HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$
⇒ Die Strategien (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,spielen,HL,spielen,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$ und
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,stören,HL), Angriff Ende: $u_2 = 10$
sind aus oben erwähnten Gründen dominant.
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M,spielen,RA,spielen, HL),werfen: $u_2 = 2$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M,spielen,RA,spielen, HL,spielen,ML,stören,HL),werfen: $u_2 = 6$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M,spielen, RA,spielen,HL,spielen,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M,spielen,RA,spielen, HL,spielen,ML,spielen,LA,werfen,MR),spielen: $u_2 = 2$
• (M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M, spielen,RA,stören,HL),werfen: $u_2 = 7$
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M, spielen,RA,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$
⇒ Die Strategien
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M,spielen,RA, spielen,HL,spielen,ML,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$ und
(M,HL,RA,spielen,LA,spielen,K,nicht spielen,MR,spielen,M, spielen,RA,stören,HL),Angriff Ende: $u_2 = 10$
sind in diesem Fall aus oben erwähnten Gründen dominant.

Zusammenfassung der Ergebnisse:
• Wenn man die Auszahlung der obigen Strategien betrachtet ergibt sich für die Angreifer:
Sie sollten darauf achten den Ball möglichst ohne gegnerische Störung an den Mitspieler weiterzugeben und aus guten Postionen (d.h. möglichst nahe zum Tor stehen,

ohne Deckung bzw. gegnerische Störung, z.B. LA, HL, M) zum Abschluss kommen.
• Für die abwehrende Mannschaft ist es am nützlichsten die angreifende Mannschaft zu stören, d.h. sie am Aufbau des Angriffs zu behindern. Dabei erhalten sie den höchsten Payoff, wenn es ihnen gelingt den Angriff vollständig zu beenden. Aber auch ein Wurf des Spielers 1 aus schlechter Position zum Tor bringt ihnen eine relativ hohe Auszahlung.

2.6 Nash-GG und teilspielperfekte GG

2.6.1 Vorgehen

Auf die Teilspielperfekten Gleichgewichte kommt man mit Hilfe der Rückwärtsinduktion. Rückwärtsinduktion liefert für rationale Spieler die optimalen Strategien, indem von den Endknoten eines Spielbaumes beginnend jeweils die nicht optimalen Entscheidungen gestrichen werden und man sich so zum Ausgangspunkt des Spiels durcharbeitet. Durch die Rückwärtsinduktion kommt man also schrittweise zum gesuchten Gleichgewicht. Dies wird im Folgenden für zwei Spielbäume, einmal ohne und einmal mit Wiederholung vorgeführt. So kann man im Ersten Schritt sehen, dass Halblinks (in allen Fällen) sich für 'Werfen' entscheidet, da im Spiel ohne Wiederholung die Entscheidung 'Spielzug neu' noch ohne Bedeutung ist und der Payoff von 'Werfen' - entweder 3 oder 4 - größer ist als der der Alternative 'Angriff Ende' (0). Im Weiteren sind auch die sich bei den jeweiligen Schritten ergebenden optimalen Entscheidungen aufgeführt.

2.6.2 Entscheidungen

Das Spiel läßt sich in 12 Ebenen unterteilen. Dadurch, dass die Angreifer das Spiel beginnen, jeweils in ungeradzahligen Ebenen die Angreifer eine Entscheidung treffen, in geradzahligen, die Verteidiger. Es ergeben sich die folgenden optimalen Entscheidungen in den Teilspielen:

1. Angreifer
   Mitte: spielen

2. Verteidiger
   Halblinks: werfen

3. Angreifer
   Rechtsaußen: stören

4. Verteidiger
   Linksaußen: werfen (an beiden Knoten)

5. Angreifer
   Kreisspieler: indifferent zwischen spielen und nicht spielen

6. Verteidiger
   Mitterechts: stören (an beiden Knoten)

7. Angreifer
   Mitte: werfen (an allen 4 Knoten)

8. Verteidiger
   Rechtsaußen: stören (an beiden Knoten)

9. Angreifer
   Halblinks: werfen (an allen 4 Knoten)

10. Verteidiger
    Mittelinks: stören (an beiden Knoten

11. Angreifer
    Halblinks: werfen (an beiden Knoten)
    Linksaußen: werfen (an beiden Knoten)

12. Verteidiger
    Mitterechts: unterbrechen (an beiden Knoten)

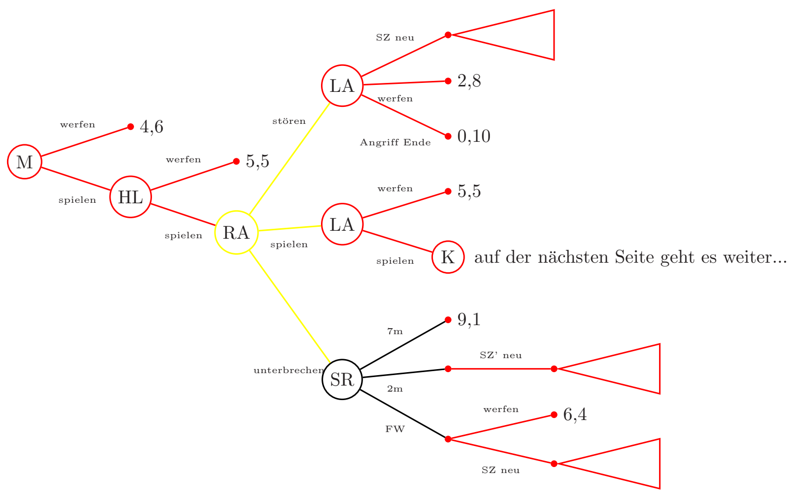
2.6.3 Teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte

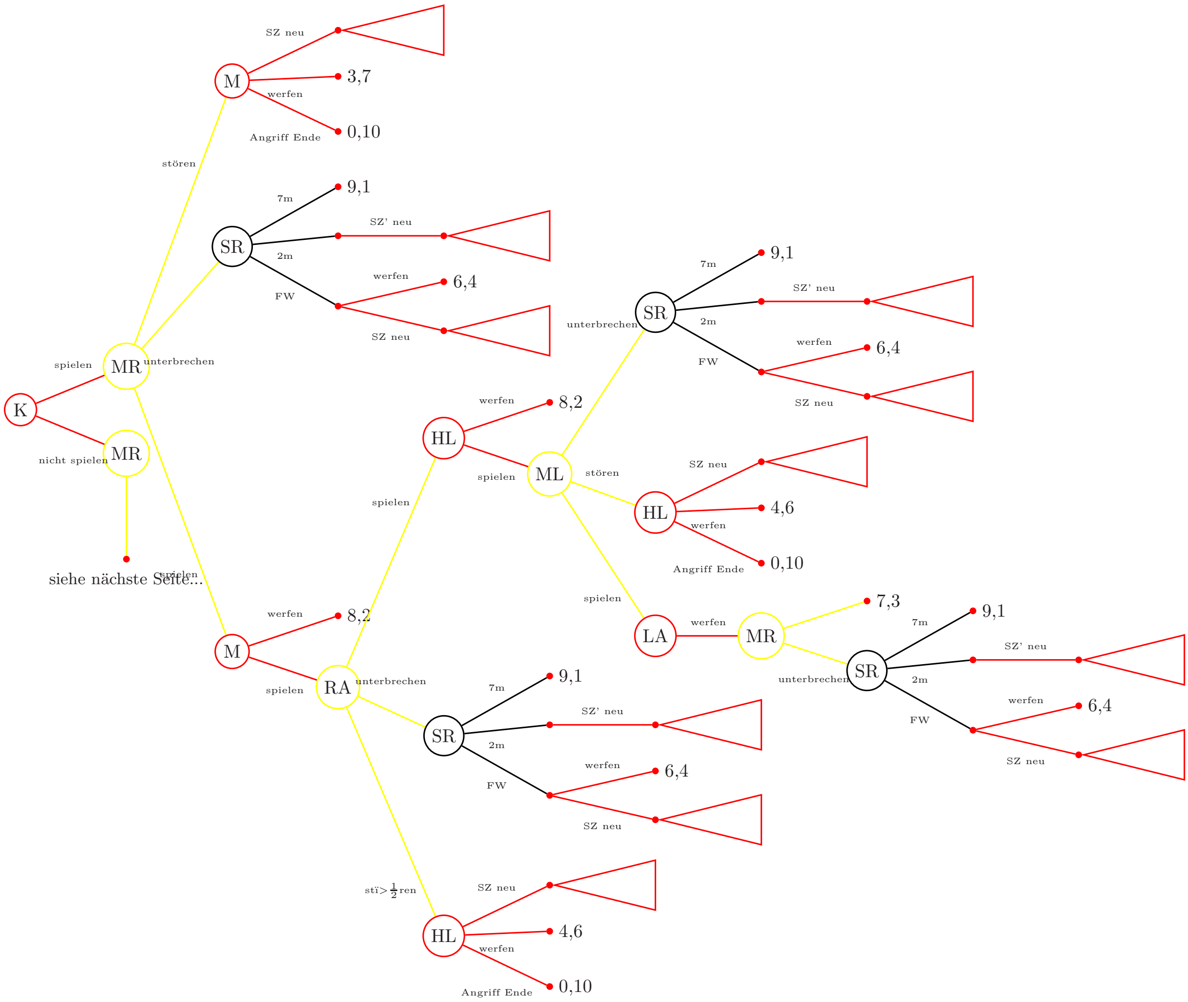
Mit diesen Entscheidungen folgen als teilspielperfekte Nash-GG: Mitte: spielen $\mapsto$ Halblinks: werfen Rechtsaußen: stören $\mapsto$ Linksaußen: werfen Linksaußen: werfen Kreisspieler: spielen $\mapsto$ Mitterechts: stören $\mapsto$ Mitte: werfen Kreisspieler: nicht spielen $\mapsto$ Mitterechts: stören $\mapsto$ Mitte: werfen Mitte: werfen Rechtsaußen: stören $\mapsto$ Halblinks: werfen Halblinks: werfen Mittelinks: stören $\mapsto$ Halblinks: werfen Linksaußen: werfen $\mapsto$ Mitterechts: unterbrechen

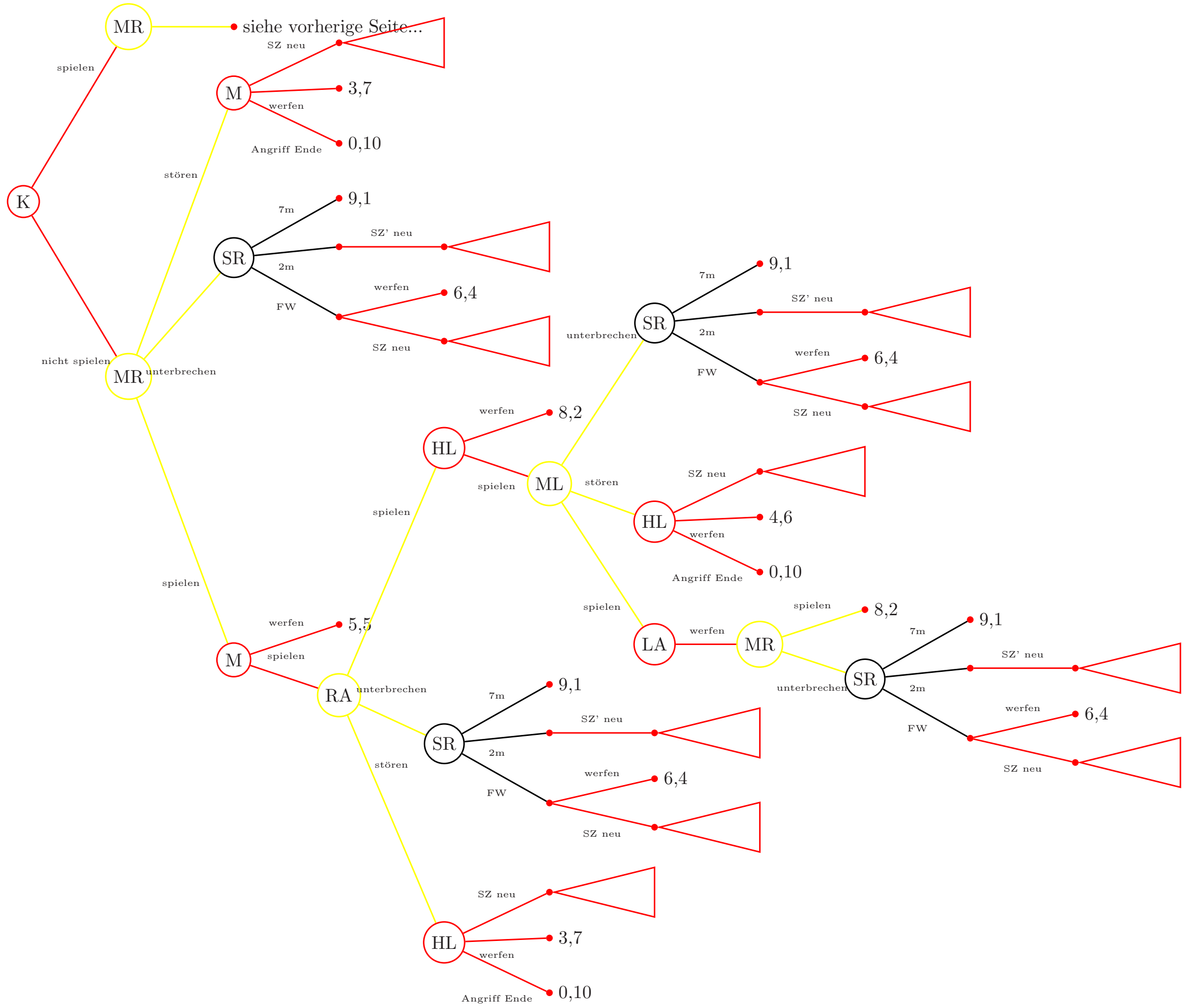
2.6.4 Spielzug wird nicht wiederholt

SZ neu, sowie SZ' neu werden mit keinem Payoff versehen und auch nicht berücksichtigt Eine Schiedsrichterentscheidung hat den Payoff (6,3;3,7)

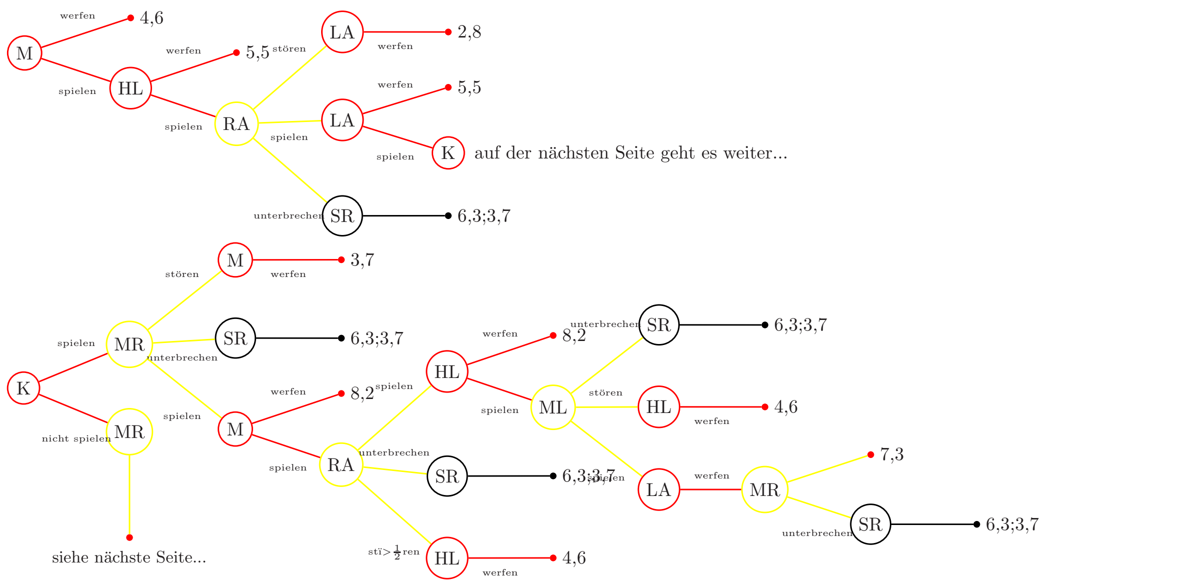
Unveränderter Baum

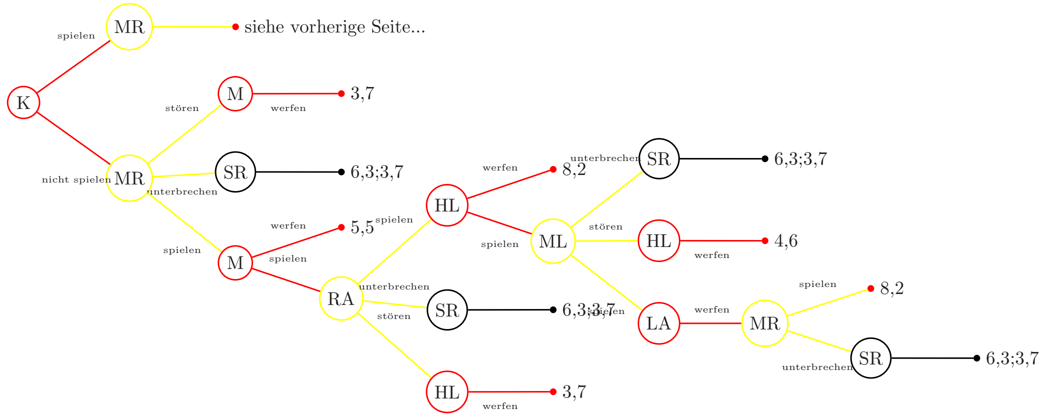



K
spielen
nicht spielen
MR
MR
siehe nächste Seite...
stören
unterbrechen
spielen
M
SZ neu
3,7
werfen
0,10
Angriff Ende
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
M
werfen
8,2
spielen
RA
HL
werfen
8,2
spielen
ML
unterbrechen
stören
spielen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
HL
SZ neu
4,6
werfen
0,10
Angriff Ende
LA
werfen
MR
7,3
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
stï>½ren
HL
SZ neu
4,6
werfen
0,10
Angriff Ende

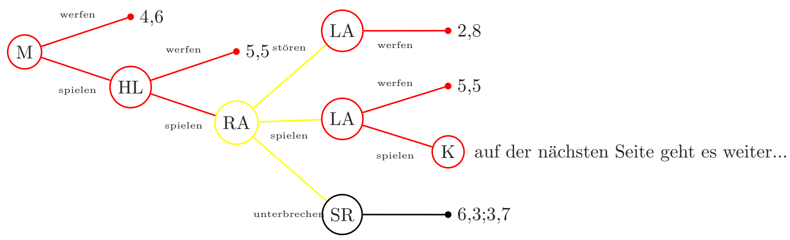

MR
siehe vorherige Seite...
spielen
K
nicht spielen
MR
stören
M
SZ neu
3,7
werfen
Angriff Ende
0,10
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
unterbrechen
spielen
M
werfen
5,5
spielen
RA
spielen
HL
werfen
8,2
spielen
ML
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
stören
HL
SZ neu
4,6
werfen
Angriff Ende
0,10
spielen
LA
werfen
MR
spielen
8,2
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
stören
HL
SZ neu
3,7
werfen
Angriff Ende
0,10

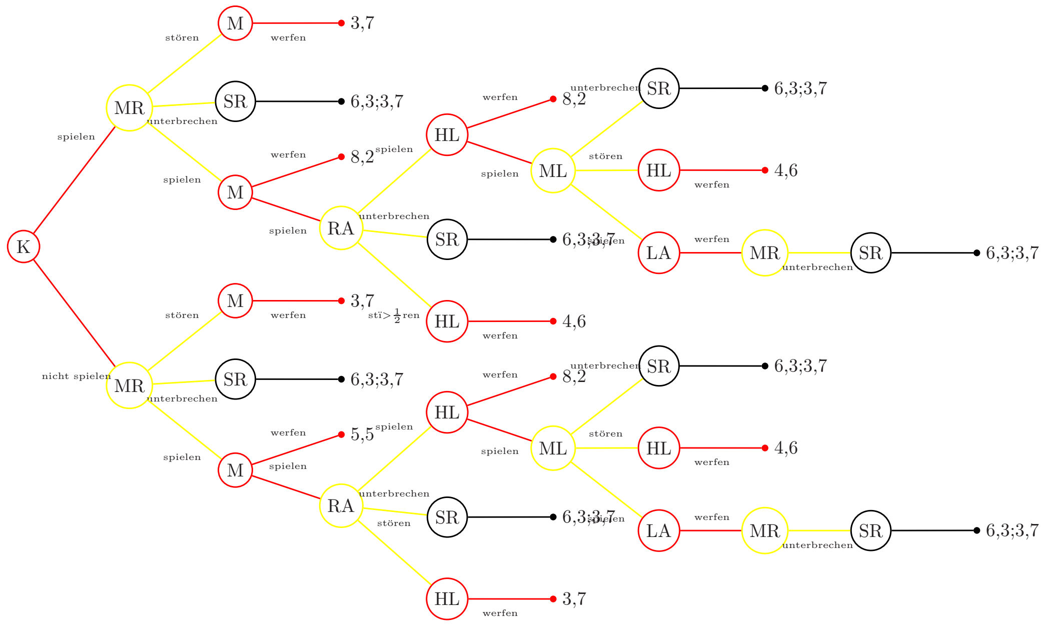
1. Schritt


M
werfen
4,6
spielen
HL
werfen
5,5
stören
spielen
RA
LA
werfen
2,8
LA
werfen
5,5
spielen
K
spielen
auf der nächsten Seite geht es weiter...
unterbrechen
SR
6,3;3,7
K
spielen
MR
stören
M
werfen
3,7
SR
6,3;3,7
unterbrechen
spielen
M
werfen
8,2
spielen
RA
spielen
HL
werfen
8,2
spielen
ML
unterbrechen
SR
6,3;3,7
stören
HL
werfen
4,6
LA
werfen
MR
7,3
unterbrechen
SR
6,3;3,7
unterbrechen
SR
6,3;3,7
stï>½ren
HL
werfen
4,6
nicht spielen
MR
siehe nächste Seite...

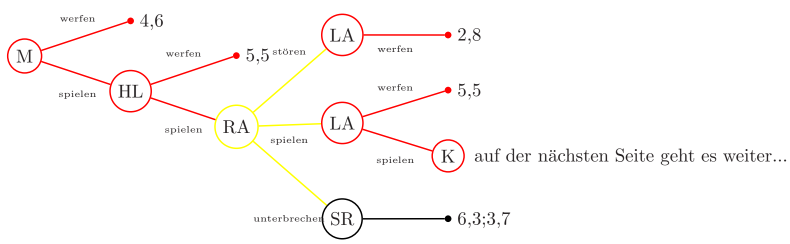


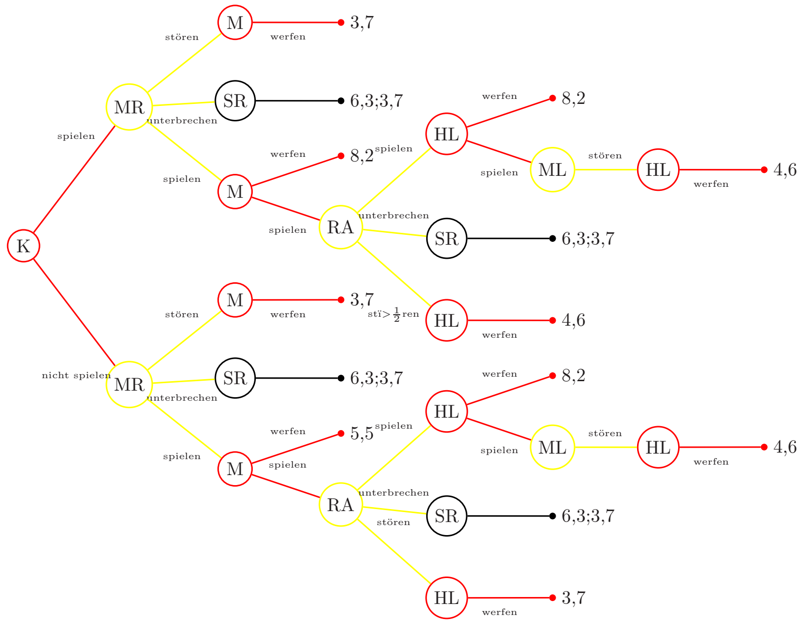
2. Schritt



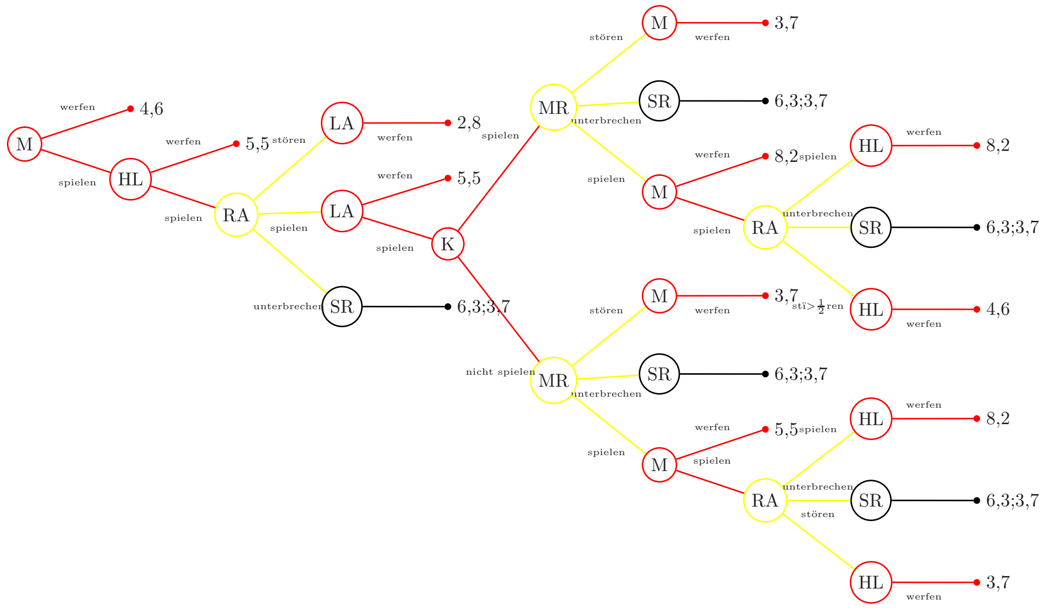


3. Schritt

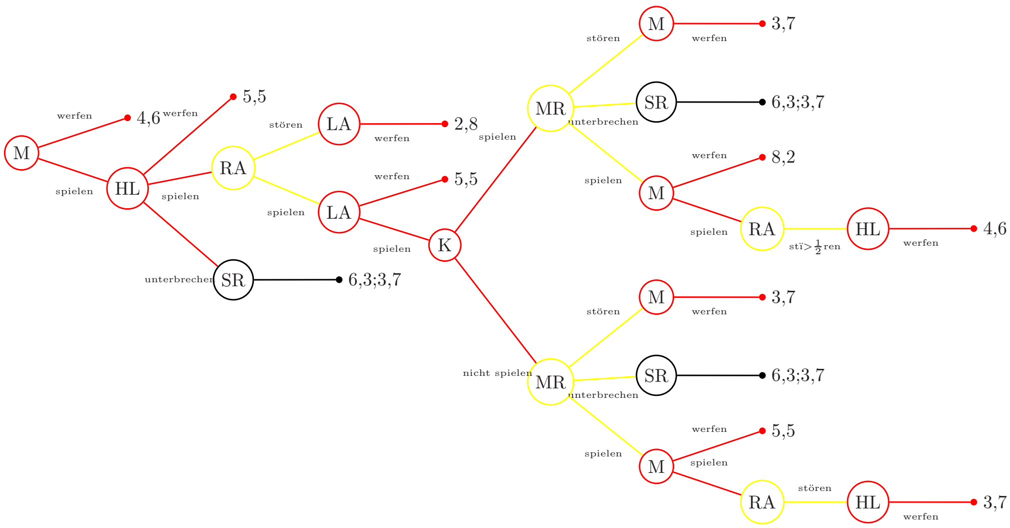



K
spielen
nicht spielen
MR
stören
unterbrechen
M
SR
werfen
3,7
6,3;3,7
8,2
5,5
HL
ML
RA
4,6
3,7

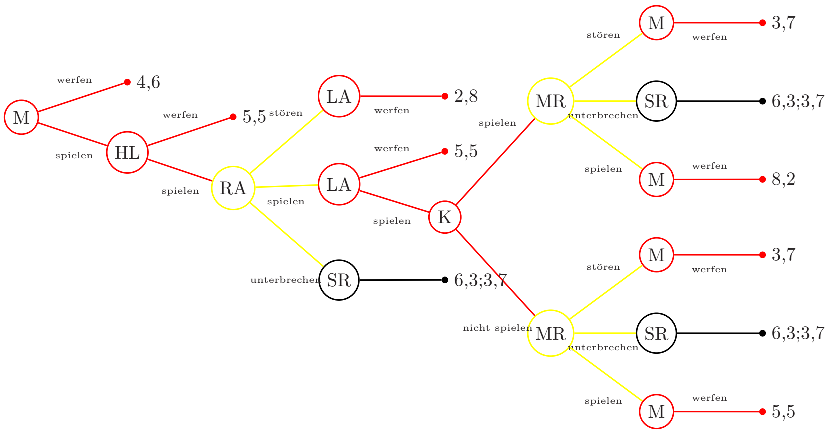
4. Schritt


M
werfen
4,6
spielen
HL
5,5
RA
LA
2,8
5,5
SR
6,3;3,7
K
MR
8,2
4,6
3,7

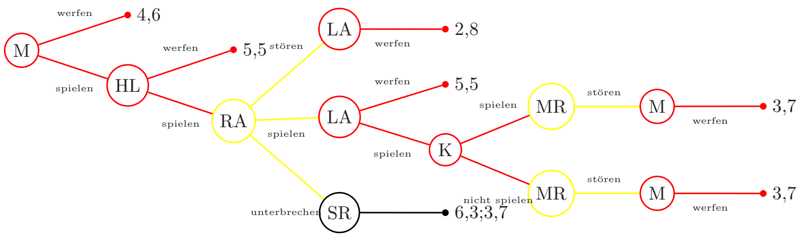
5. Schritt



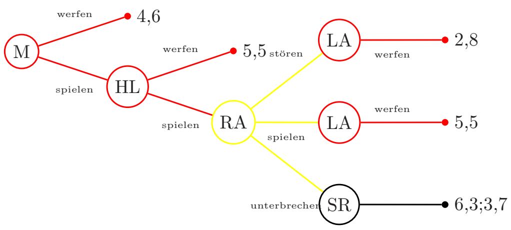
6. Schritt



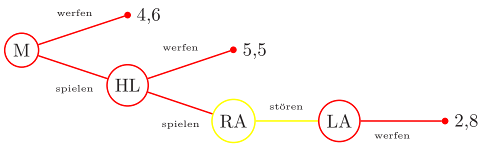
7. Schritt



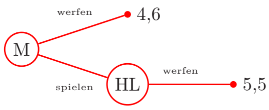
8. Schritt



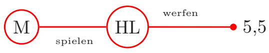
9. Schritt



10. Schritt



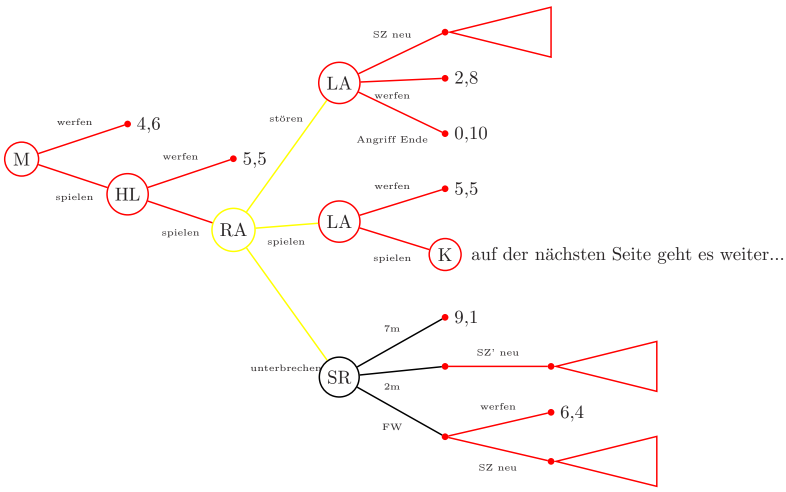
11. Schritt

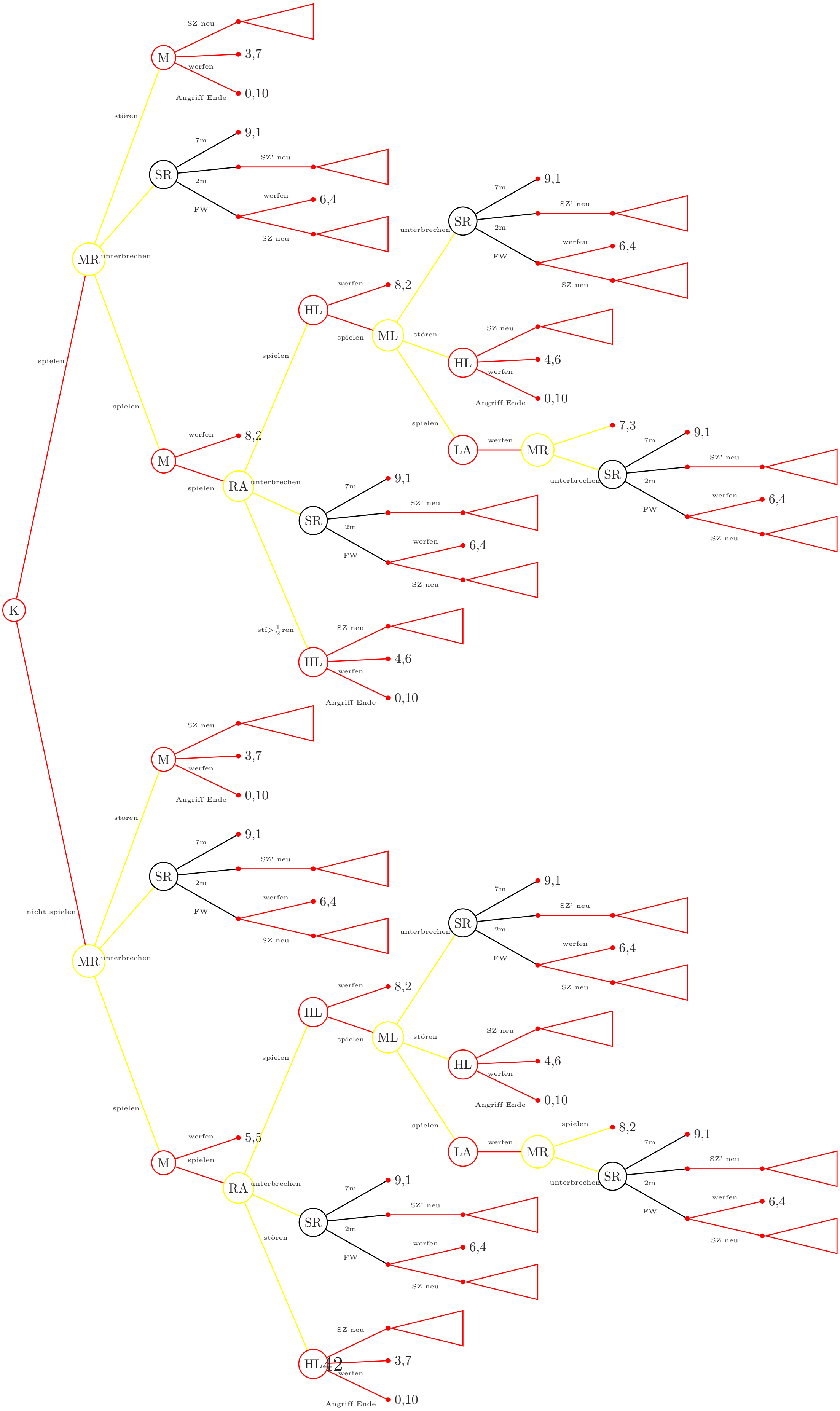


2.6.5 Spielzug kann wiederholt werden

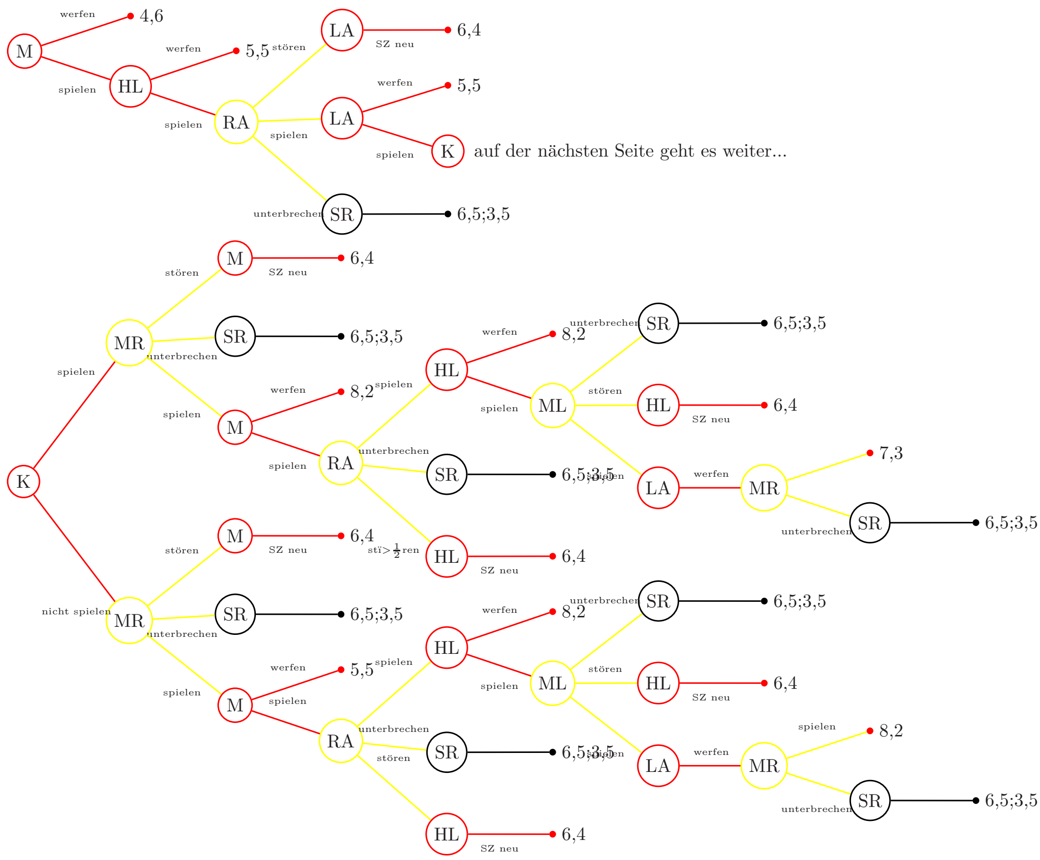
SZ neu bekommt den Payoff 6,4
SZ' neu bekommt den Payoff 8,2
Eine Schiedsrichterentscheidung hat den Payoff (6,5;3,5)

Unveränderter Baum

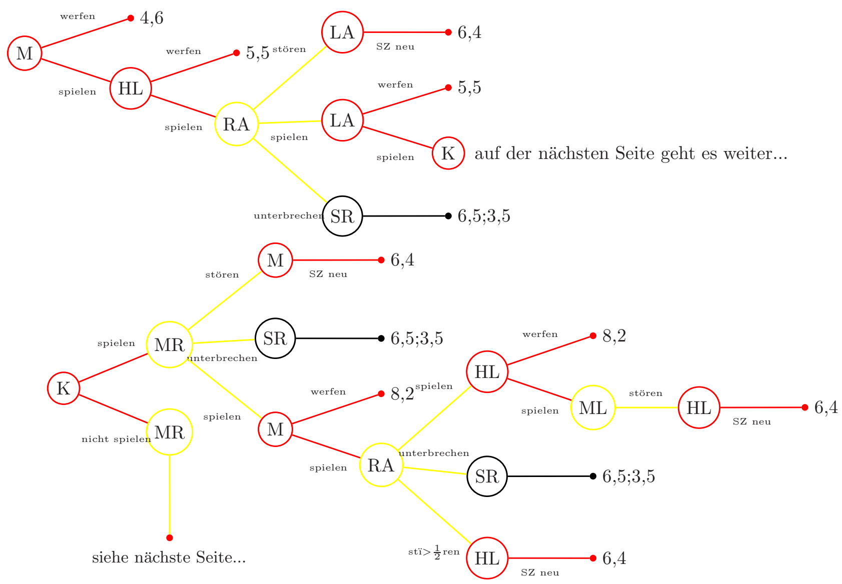


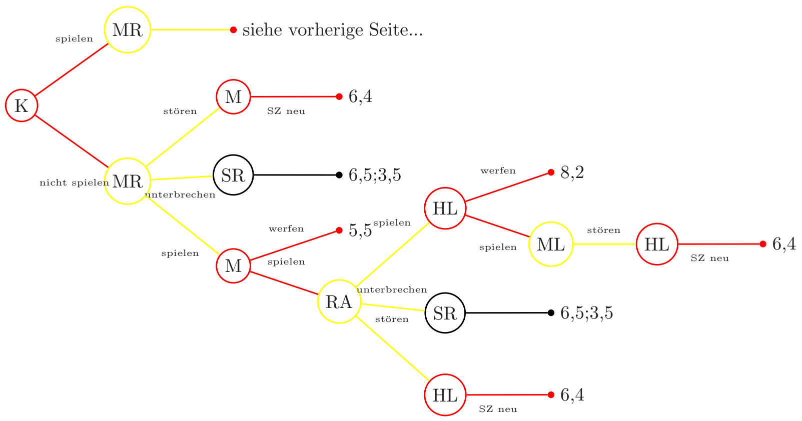

K
spielen
nicht spielen
MR
stören
unterbrechen
spielen
M
SZ neu
3,7
werfen
0,10
Angriff Ende
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
M
werfen
8,2
spielen
RA
unterbrechen
HL
werfen
8,2
spielen
ML
stören
HL
SZ neu
4,6
werfen
Angriff Ende
0,10
spielen
LA
werfen
MR
7,3
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
sti>$\frac{1}{2}$ren
HL
SZ neu
4,6
werfen
Angriff Ende
0,10
MR
stören
unterbrechen
spielen
M
SZ neu
3,7
werfen
Angriff Ende
0,10
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
M
werfen
5,5
spielen
RA
unterbrechen
stören
HL
werfen
8,2
spielen
ML
stören
HL
SZ neu
4,6
werfen
Angriff Ende
0,10
spielen
LA
werfen
MR
spielen
8,2
unterbrechen
SR
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
werfen
6,4
SZ neu
HL
SZ neu
3,7
werfen
Angriff Ende
0,10

1. Schritt

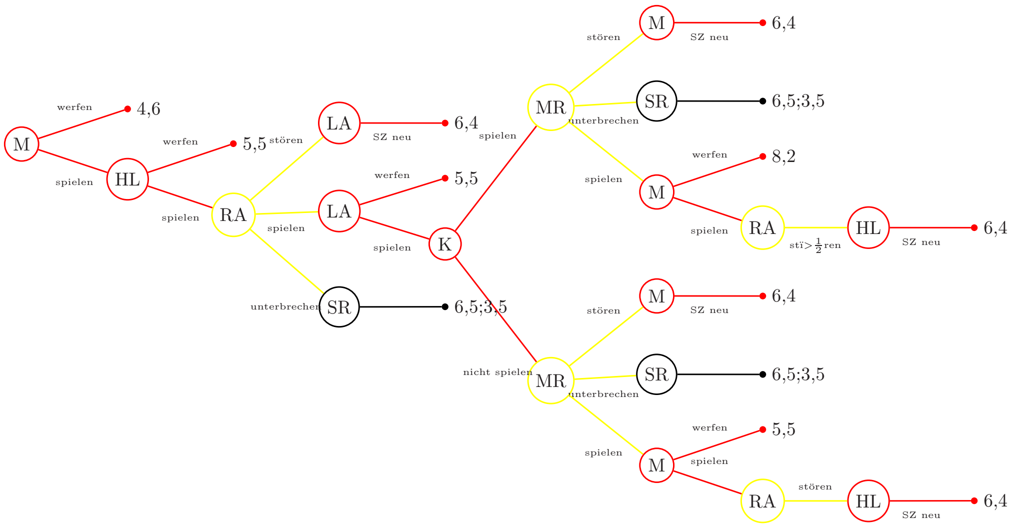


2. & 3. Schritt

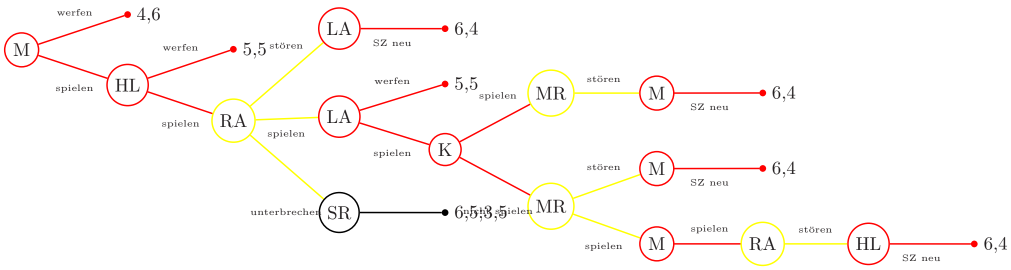




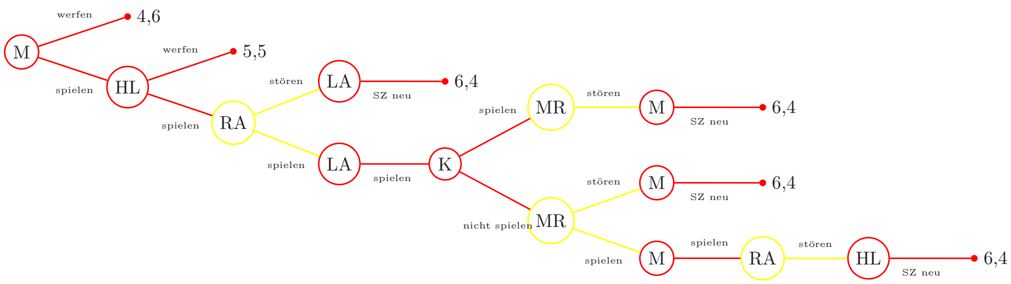
4. & 5. Schritt



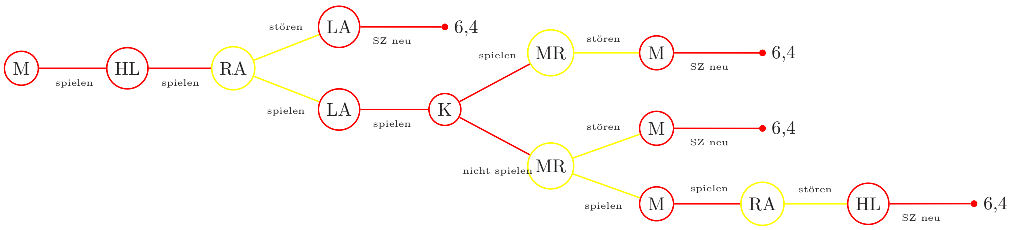
6. & 7. Schritt



8. & 9. Schritt



10. & 11. Schritt



Die Ergebnisse und die Interpretation werden ausführlich zusammen mit denen der Varianten zusammengefaßt.

3 Varianten

3.1 Diskontierung über die Zeit

Bei dieser ersten betrachteten Variante lassen wir die Modellannahme 'Ein Angriff/Spielzug wird gespielt', also die zeitliche Begrenzung fallen und es entsteht nun die Möglichkeit für die angreifende Mannschaft, den Spielzug zu wiederholen.
Im ersten Durchgang gilt wieder:
SZ neu bekommt den Payoff 6,4
SZ' neu bekommt den Payoff 8,2
Eine Schiedsrichterentscheidung hat den Payoff (6,5;3,5)
Bei wiederholtem spielen des Spielzuges verschlechtern sich die Ergebnisse für die Angreifende Manschaft, da ja bei wiederholtem Durchführen des gleichen Spielzuges die Verteidigende Manschaft die Taktik/den Spielzug der Angreifer jedes mal besser versteht. Unter dieser Annahme macht es für die Angreifer keinen Sinn darauf zu drängen den Spielzug zu wiederholen. Da schon bei einer Verschlechterung der Chancen um 10% pro Durchgang, nach zwei Wiederholungen die ursprüngliche Lösung (HL wirft mit Payoff 5,5) besser gewesen wäre.

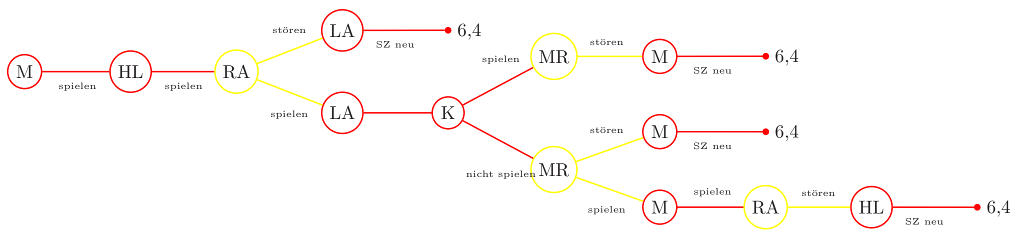
Die Payoffs im ersten Durchgang entsprechen denen des Basisspiels:
(9,1) bei 7Meter
(8,2) bei freiem Wurf mit einer Sperre, und bei 2Minuten-Strafe
(7,3) bei einem freien Wurf
(6,4) bei einem Freiwurf oder der Wiederholung des Spielzuges
(5,5) im Zweikampf mit einem (passiven, d.h. Aktion 'spielen') Gegner
(4,6) wie oben mit 2 Gegnern
(3,7) im Zweikampf mit einem (aktiven, d.h. Aktion 'stören, unterbrechen') Gegner
(2,8) wie oben mit 2 Gegnern
(0,10) Angriff Ende ohne Abschluß
(6.5,3.5) wenn Verteidigung unterbricht und es zur Schiedsrichterentscheidung kommt (kombiniert aus Freiwurf, 2 Minuten und 7 Meter)

Die Payoffs im zweiten Durchgang ergeben sich aus einer Verschlechterung der Payoffs des Basisspiels um 10% für die Angreifende Mannschaft:
(8.1,1.9) bei 7Meter
(7.2,2.8) bei freiem Wurf mit einer Sperre, und bei 2Minuten-Strafe
(6.3,3.7) bei einem freien Wurf
(5.4,4.6) bei einem Freiwurf oder der Wiederholung des Spielzuges
(4.5,5.5) im Zweikampf mit einem (passiven, d.h. Aktion 'spielen') Gegner
(3.6,6.4) wie oben mit 2 Gegnern

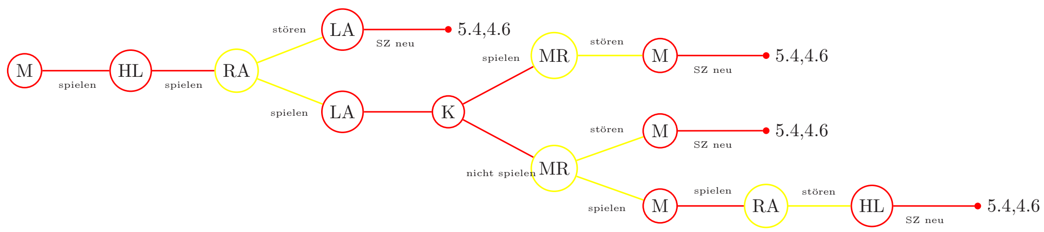
(2.7,7.3) im Zweikampf mit einem (aktiven, d.h. Aktion 'stören, unterbrechen') Gegner
(1.8,8.2) wie oben mit 2 Gegnern
(0,10) Angriff Ende ohne Abschluß
(5.85,4.15) wenn Verteidigung unterbricht und es zur Schiedsrichterentscheidung kommt (kombiniert aus Freiwurf, 2 Minuten und 7 Meter)

Die Payoffs im dritten Durchgang ergeben sich aus erneuten Verschlechterung um 10% für die Angreifende Mannschaft:
(7.29,2.71) bei 7Meter
(6.48,3.52) bei freiem Wurf mit einer Sperre, und bei 2Minuten-Strafe
(5.67,4.33) bei einem freien Wurf
(4.86,5.14) bei einem Freiwurf oder der Wiederholung des Spielzuges
(4.05,5.95) im Zweikampf mit einem (passiven, d.h. Aktion 'spielen') Gegner
(3.24,6.76) wie oben mit 2 Gegnern
(2.43,7.57) im Zweikampf mit einem (aktiven, d.h. Aktion 'stören, unterbrechen') Gegner
(1.62,8.38) wie oben mit 2 Gegnern
(0,10) Angriff Ende ohne Abschluß
(5.265,4.735) wenn Verteidigung unterbricht und es zur Schiedsrichterentscheidung kommt (kombiniert aus Freiwurf, 2 Minuten und 7 Meter)

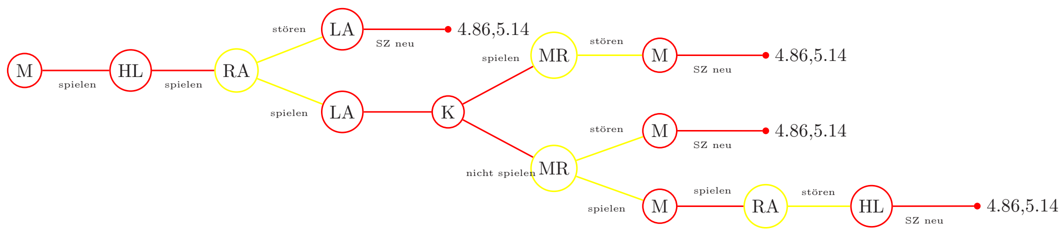
erster Durchgang



zweiter Durchgang

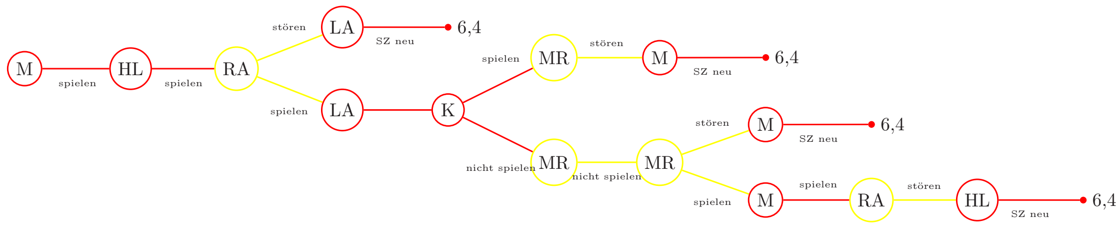


dritter Durchgang



Ergebnis ohne Wiederholung

Ergebnis mit Wiederholung



3.1.1 Ergebnis

Im Basisspiel ist keine Wiederholung des Spielzuges vorgesehen und bei einer Rückwärtsinduktion durch den Spielbaum lassen sich die aufgeführten teilspielperfekten Gleichgewichte, sowie das Nash-Gleichgewicht Mitte spielt zu Halblinks, der dann wirft, identifizieren. Aufgrund des hohen Komplexitätsgrades war es nicht möglich die Normalform des gesamten Spieles aufzustellen und somit war der Algorithmus zur Identifizierung von Nashgleichgewichten ohne ein PC-Berechnungsprogramm nicht durchführbar. Im nächsten Schritt wurde angenommen, dass der Spielzug wiederholt werden kann und der Wiederholung ein fester Payoff zugeordnet. Als letzte Annäherung an die Realität sind wir davon ausgegangen, dass im Zuge einer Wiederholung des Spielzuges die verteidigende Mannschaft einen Vorteil im Sinne eines Lerneffektes hat. Wenn eine ewige Wiederholung zugelassen wird, würde sich das Gleichgewicht auf das Wiederholen des Spielzuges verlagern, und spätestens bei einem dritten Durchgang des Spielzuges mit Diskontierung zeigt sich deutlich der daraus der angreifenden Mannschaft erwachsende Nachteil.

3.1.2 Interpretation

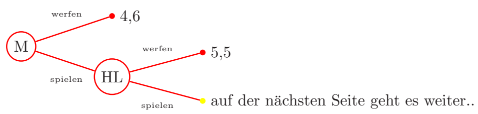
Da der Spielbaum sehr komplex ist - ein Spielzug, der ausgespielt nur wenige Sekunden in Anspruch nimmt, lässt sich auch nach starker Vereinfachung wie der Annahme, daß ein Verteidiger vorher festlegen kann, ob er ein Eingreifen des Schiedsrichters provoziert oder nicht, bereits in 12 Ebenen aufschlüßeln - lassen sich durch Rückwertsinduktion viele teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte finden. Das Nash-Gleichgewicht - Mitte spielt zu Halblinks und dieser versucht sein Glück und wirft aufs Tor hat in der Realität keine große Bedeutung. Diese Entscheidung würde bereits im Vorhinein gemachte Überlegungen zu möglichen Spielzügen überflüssig machen. Da allerdings in der Realität auch nicht davon ausgegangen werden kann, daß alle Spieler rational entscheiden und immer einen Baum aller möglichen Konsequenzen ihrer Entscheidung vor Augen haben, haben die teilspielperfekten Gleichgewichten eine größere Bedeutung. Gute Spieler können in der kurzen Zeit, die ihnen für ihre Entscheidung bleibt sich zumindest einen Teilbaum des gesamten Spielzugs überlegen und so eine für ihre Situation günstige Wahl treffen. Auch das oben theoretisierte Wiederholen des gesamten Spielzuges wird sich so im Handballstadion nicht beobachten lassen. Wie ja das Beispiel der Diskontierung um 10% zeigt, lohnt es sich theoretisch nicht für die angreifende Mannschaft das Spiel neu aufzubauen, da die Gegner dank eines angenommenen Lerneffektes die Angreifer besser versteht und sich somit die Torwahrscheinlichkeit verringert. In Wahrheit werden jedoch Spielzüge immer wieder neu aufgebaut und das mit Erfolg.
Alles in Allem lässt sich sagen, daß die Betrachtung eines gesamten Spielbaumes und seine Analyse auf Gleichgewichte hin sicherlich eine gute Grundlage darstellt um verschiedene Spielzüge bei gegebenen Grundvoraussetzungen zu vergleichen und auch für eine Taktikbesprechung Vorfeld eines Spieles sinnvoll ist, aber im laufenden Spiel ist der Einfluss auf die Entscheidungen der Spieler aufgrund der hohen

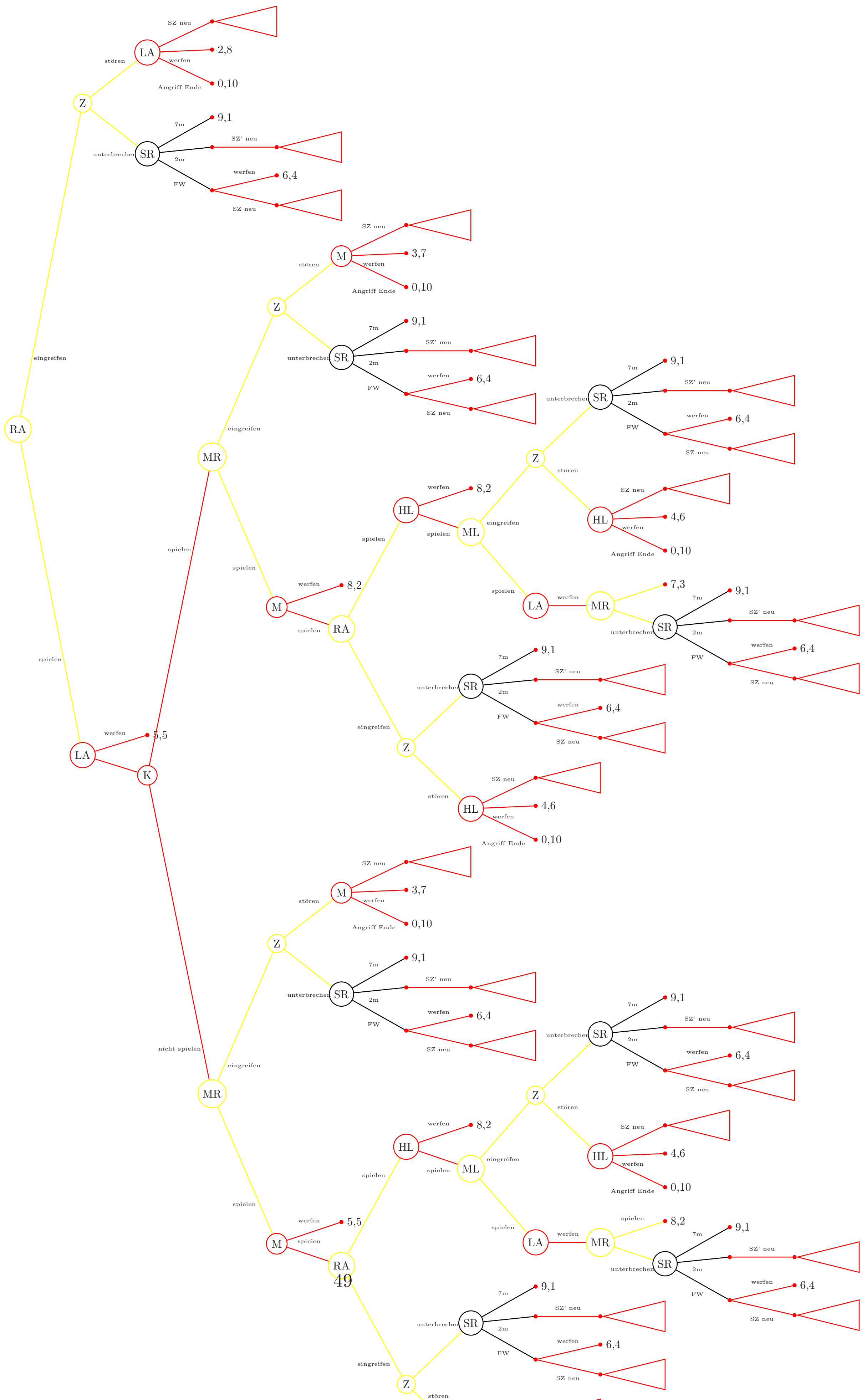
Komplexität sehr gering.

3.2 Der 'Zufall' kommt ins Spiel

3.2.1 Zufall über Eintrittswahrscheinlichkeiten

Bei dem ursprünglichen Baum ist leicht zu erkennen, dass es für den Gegner immer sinnvoll ist den Spielzug zu stören!
Deswegen wird in dieser Variante die Bedingung fallengelassen, das die abwehrende Mannschaft weiß, ob sie den Spielzug ohne Schiedsrichterentscheidung unterbricht, oder den Schiedsrichter zu einer Entscheidung zwingt. Dies entspricht sehr viel eher der Realität, da ein Spieler unabsichtlich Fouls begehen kann, oder, auf der anderen Seite bewußt foulen kann, wenn der Schiedsrichter nicht zu ihm sieht.
In unserem Modell haben wir dieses wie folgt implementiert:
Nach einer jeden Entscheidung eines Abwehrspielers den Spielzug nicht laufen zu lassen, wird ein zusätzlicher Knoten (Z) für Zufall eingefügt. Der Spieler kann nur entscheiden diesen Knoten zu wählen, hat aber dann keinen Einfluss darauf, in welchem Ast er landet. Hier wurden den verschiedenen Ästen Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet, welche wie schon vorher wieder fiktiv sind und nur auf Erfahrungswerten basieren.

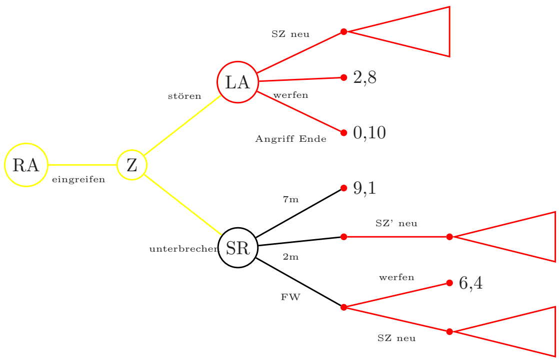



RA
eingreifen
spielen
Z
stören
unterbrechen
LA
SR
SZ neu
2,8
werfen
Angriff Ende
0,10
7m
9,1
SZ' neu
2m
FW
6,4
LA
K
5,5
MR
M
8,2
HL
ML
nicht spielen
7,3

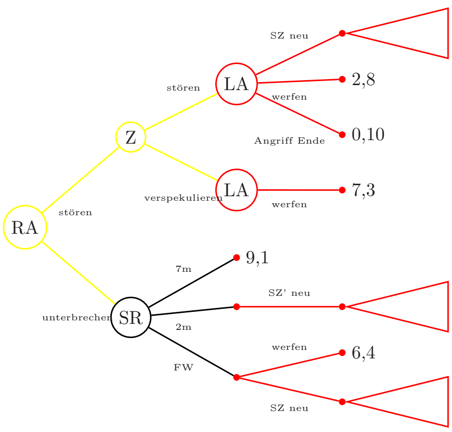
3.2.2 Zufall über Payoffs

Eine weitere Möglichkeit, den Zufall ins Spiel zu bringen, ist die Payoffs zu verändern, wenn die abwehrende Mannschaft einen 'Fehler' macht. Fehler ist hier so zu interpretieren, daß der Abwehrspieler den Spielzug unterbrechen möchte, sich aber verspekuliert und somit in der Abwehr ausfällt und die Angreifende Mannschaft dadurch sofort in eine erwünschte Überzahlposition kommt.
Diese Variante wird in diesem Projekt allerdings nicht mehr ausgeführt, da die Entscheidungsregeln wie in der vorherigen Variante des Zufalls zu behandeln sind. Lediglich der Knoten Zufall verschiebt sich von unterbrechen und stören zu stören und verspekulieren. Diesem wird dann eine Eintrittswahrscheinlichkeit und modifizierte Payoffs zugeordnet.

Baum mit Zufallsknoten nach Variante 1:



Baum mit Zufallsknoten nach Variante 2:



3.3 Spieler sind nicht gleich stark

Eine weitere Variante ist, die Annahme 'alle Spieler sind gleich gut' fallen zu lassen. Dadurch verändern sich zuerst die Payoffs, da nun jedem Spieler eigene Payoffs zugeordnet werden, welche sich wiederum verändern, sobald der Spieler auf einer anderen als der ursprünglichen Position spielt.
Dadurch ergibt sich für die Payoffs:
Es sind sechs Feldspieler auf dem Feld, die eigene Payoffs für neun Wurfmöglichkeiten in der Stellung zum Gegner und diese nocheinmal für jede Spielerposition haben. Also gibt es $6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$ verschiedene Payoffs. Dies ist eine den Spielzug sehr verändernde Variante, denn:
Ist ein Spieler wesentlich besser als die restlichen, ergäbe sich für die Dominanzen:

es ist immer besser, wenn dieser Spieler den Spielzug abbricht und selber wirft (denn: höherer Payoff als alle anderen).
Ist der den Spielzug abschließende Spieler schlechter als die restlichen, wäre es auch nicht sinnvoll, den Spielzug bis zum Ende zu spielen, da dieser Payoff dann geringer ist, als wenn vorher schon geworfen würde.
Es wird also offensichtlich, dass gerade diese Annahme, dass die Spieler gleich stark sind, das Spiel wesentlich vereinfacht, auch wenn dadurch die 'offensichtlich besten' Strategien immer die besten sind (dies ist bei ungleich starken Spielern nicht der Fall).
Das Problem an dem Fallenlassen dieser Annahme ist jenes:
Wie bekommt man hier die einzelnen Payoffs, da jeder Spieler einzeln betrachtet werden muss. Jedoch ist jeder Spieler je nach Tagesform stärker oder schwächer und dies kann man in den Payoffs nicht problemlos umsetzen. Dazu wären sehr detaillierte Informationen über die einznen Spieler nötig (z.B. das übliche Leistungsniveau, die Tagesform, also wurde genug geschlafen, ist der Spieler im Streß, u.s.w.).

4 Erkenntnisse zu einem Handballspielzug

Durch die Analyse dieses Spielzuges konnten zusammenfassend folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Um einen Spielzug im spieltheoretischen Sinne analysieren zu können, müssen einige Annahmen vorausgesetzt werden, welche den Spielzug in der Realität nicht mehr durchführbar machen. Die Annahmen sind jedoch nötig, um Entscheidungen einschränken zu können, Payoffs zu bekommen und die Formalisierung des Spielzuges zu ermöglichen. Dieses ist ein Problem, daß in jedem Bereich der Modellierung existiert, da die Realität zu komplex, aber auch zu 'zufällig' beziehungsweise zu 'unbekannt' ist. Dadurch gilt auch hier: der Spielzug wird in einem theoretischen Modell betrachtet und es gibt deswegen enorme Abweichungen zur Realität.

2. Selbst bei einem einfachen und kurzem Spielzug, es kommen wesentlich komplexere beim Handball vor, entsteht ein sehr großer Spielbaum und das formalisierte extensive Spiel wird unübersichtlich aufgrund der enormen Datenmenge. Da die Umwandlung in ein Spiel in Normalform noch mehr Daten ergibt, ist es unmöglich, das gesamte Spiel in Tabellenform darzustellen und mit diesen Tabellen dann noch arbeiten zu können. Deswegen haben wir bewußt auf die komplette Darstellung verzichtet und sind auf eine allgemeine Berechnung und Erstellung eines Spiels in Normalform eingegangen. Dieses wurde dann anhand von Teilbäumen unseres Spielzuges vorgestellt.

3. Die Dominanzen und Gleichgewichte sind durch die Payoffs und den Spielbaum wie in dem Projekt entstanden. Gerade durch die Dominanzen wurde ersichtlich, daß der Basisspielzug mit den getroffenen Annahmen unrealistisch ist, da viele Faktoren außer Acht gelassen wurden. Ein sehr wichtiger Faktor in einem realen Handballspiel ist jener, daß ein Wurf von verschiedenen Positionen verschiedene Torwahrscheinlichkeiten zur Folge hat, zum einen durch die Spielstärke des Spielers (es ist sehr unwahrscheinlich, daß auch nur zwei Spieler genau gleich stark sind), zum anderen, ist auch der Torwurf vom Winkel des Tores zu Werfer entscheidend. Diese Umstände haben wir in den Varianten nur sehr kurz behandelt, da es hier enorm viele Variationsmöglichkeiten gibt, welche alle zu verschiedenen Payoffs, beziehungsweise Torwahrscheinlichkeiten führen.

4. Anhand der Variationen des Spielzugs wurden Ausblicke gegeben, inwieweit sich der Spielzug verändert, wenn auch nur eine Voraussetzung oder Annahme fallengelassen oder geändert wird. Es entstehen dadurch teilweise sogar gegensätzliche Ergebnisse.

Als Schlußgedanken möchten wir noch darauf hinweisen, daß ein Spielzug wie dieser ein typischer Spielzug in einem Handballspiel ist und die einzelnen Spieler im Normalfall circa eine Sekunde haben, um die jeweilige Entscheidung zur nächsten Aktion zu treffen. Da sich natürlich ein Spieler auf dem Spielfeld während dem Spiel keine spieltheoretischen Entscheidungen trifft, werden die Entscheidungen auf einem ganz anderen Level getroffen. Manche (sehr gute) Spieler entscheiden einen Spielzug aus dem Bauch heraus und können einen Spielzug spielen ohne ihn wirklich zu kennen oder anzusagen. Diese haben dann meist ein sehr gutes periphäres Sehen und haben dadurch immer das gesamte Spiel im Blick. Der durchschnittliche Spieler trifft seine Entscheidungen aber nicht bewußt, sondern automatisiert. Diese Automatisation entsteht durch stetiges trainieren des Spielzuges unter 'realen' Umständen und beinhaltet meistens nur zwei Alternativen. Es wird nur der direkte Gegenspieler betrachtet und auf dessen Aktion folgt die automatisierte Reaktion.
Letztendlich ist die spieltheoretische Betrachtung eines Spielzuges also nur eine Spielerei, die den Spielern auf dem Feld nicht hilft.
Einzig für den Trainer wäre ein Vergleich unter verschiedenen Spielzügen interessant, welcher gesamt betrachtet einen höheren Erwartungswert für ein Tor als ein anderer Spielzug hat, um zu entscheiden, welche Spielzüge am effektivsten sind und daher trainiert werden sollten.

5 Literatur

Für unser Projekt haben wir folgende Quellen verwendet:

1. Vorlesungsskript Spieltheorie - Prof. Schottenloher
2. http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de
3. http://www.handballregeln.de/