Das Braess Paradoxon

Gliederung

- Einleitung
- Graph und Strassennetz
- Optimatilität
- Kritischer Strom
- Existenzsatz
- Beispiel

Einleitung

- Interesse beim Verkehrsplannung und Verkehrssteuerung:

  Wie sich der Fahrzeugstrom auf die einzehlnen Strassen des Verkehrnetzes verteilt

  (Bekannt: Anzahl der Fahrzeuge für alle Ausgangs- und Zielpunkte)

  Berechnung von den möglichen Wegen jeweils der günstigte (Aufwand, der zum Durchfahren nötig ist) gewählt wird.

  Die Grundlage für die Bewertung des Aufwandes bildet die Fahrzeit.

- Mathematische Behandlung: das Strassennetz wird durch einen gerichteten Graphen beschrieben.

  - Charakterisierung der Bogen durch Angabe des Zeitaufwandes.

  - Günstigten Stromverteilung : wenn die Bewertung konstant ist

    (d.h. wenn die Fahrzeiten unabhängig von der Grösse des Verkehrsflusses sind. – kurzeste Abstand zweier Punkte eines Graphen und den zugehörigen kritischen Pfad –)

  Realistischeres Modell: Abhängigkeit der benötigten Zeit und der Stärke des Verkehrs zu berücksichtigen.

- Eigenschaften durch ein einfaches Modelbeispiel mit nur vier Knoten diskutiert.

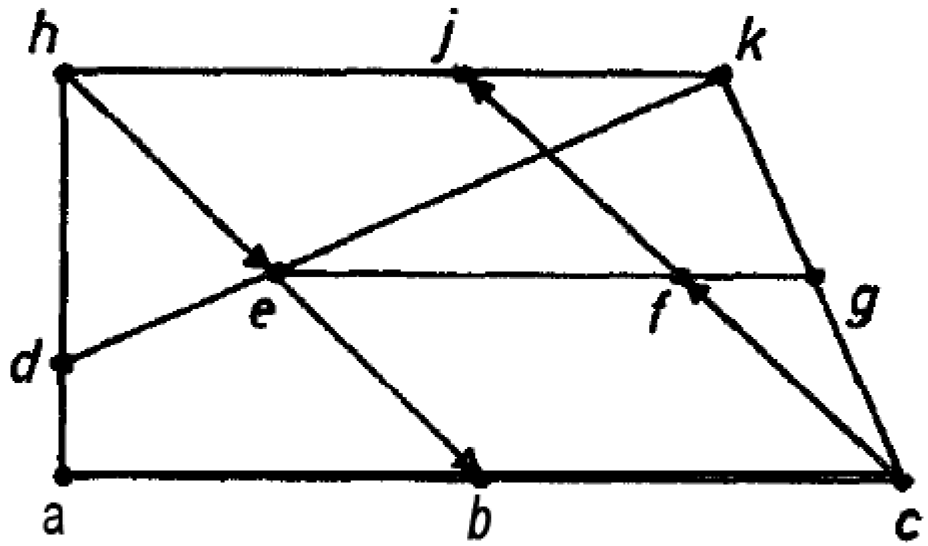
  - Eine allgemeine Steuerung selbst für die Fahrer Vorteile bringen, die der Meinung sind, für sich selbst günstigere Wege herausfinden zu können.

Paradoxon: bei einer Erweiterung des Vehrkehrnetzes um eine zusätzliche Strasse der Strom in ungüstigen Fällen, so umschichten kann, dass längere Fahrzeiten notwendig werden.

Graph und Straßennetz

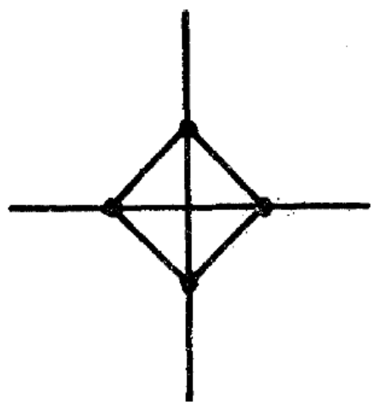
- Der Beschreibung von Verkehrsnetzen dienen Graphen, bei denen die Verbindungslinien der Knoten, die Bögen, einen Richtungssinn haben.

- Zwei Bögen, die sich nur durch ihre Richtungen unterscheiden, kann man in Abbildungen auch zu einer Strecke zusammenfassen.


h
j
k
e
f
g
d
a
b
c

- Im allgemeinen sind die Knoten den Straßenkreuzungen zugeordnet.

- Genauer: man kann die Kreuzungen entsprechend den (vier) Einmündungen wie in der Abb. in vier Knoten auflösen.



Schreibweise f. die Knoten, Bögen und Ströme

- $\{a^i\}$ Knoten (Punkte) des Graphen
- $\{u_\alpha\}$ Bögen des Graphen
  (Die Bögen sind mit einer Richtung versehen)
- φ_α Strom (Fluβ) auf u_α
  (Fahrzeuge/Zeiteinheiten)

- Verkehrsnetze mit stationärem Strom
- der Gesamtstrom setzt sich aus verschiedenen Stromfäden zusammen
- jedem Stromfaden entspricht ein Pfad im Netz
- jeder Faden besitzt einen Ausgangs- und einen Zielknoten in dem Netz
- Es brauchen nur die Pfade berücksichtigt zu werden, die keine Zyklen enthalten

- $\{U_\beta\}$ Pfade, die keinen Bogen mehrfach enthalten

- Φ_β Strom entlang U_β

- Φ sei der Vektor mit den Komponenten Φ_β

- Die Verknüpfung der Ströme von Pfaden und Bögen wird durch eine Wegmatrix hergestellt, deren Koeffizienten wegen des Verbots von Zyklen nur die Werte 1 oder 0 annehmen.

- $$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \; falls \; der \; Pfad \; U_{\beta} \; den \; Bogen \; u_{\alpha} \; enthaelt \\ 0 \; sonst \end{cases} \qquad (2.1)$$

- Es ist $\varphi_{\alpha} = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} \Phi_{\beta}$ (2.2)

- alle Ströme haben nichtnegative Werte

- Spezialfall: der gesamte Strom besitzt einen gemeinsamen Ausgangspunkt und einen gemeinsamen Zielpunkt, die wir dann mit a^0 *bzw.* a^∞ bezeichnen.

- Der Gesamtfluß berechnet sich gemäß

$$|\Phi| = \sum_{\beta} \Phi_{\beta}. \tag{2.3}$$

- Allgemeiner Fall:
  - Indexmengen B_ν einführen
  - in den Klassen $\{U_\beta; \beta \in B_\nu\}$ befinden sich nur Pfade mit gleichen Ausgangs- und gleichen Zielknoten

- Es sei in Analogie zu (2.3):

$$\left|\Phi_\nu\right| = \sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta \qquad (2.3')$$

- der günstigste Pfad = der Pfad, mit dem geringsten Aufwand bzgl. Wegkosten, Fahrzeiten und Weglänge, der für das Durchfahren erforderlich ist.

- ausschlaggebende Größe: die Fahrzeit, (so wird auch zum Ausdruck gebracht, dass der Aufwand von der Verkehrsdichte abhängen kann)

Definitionen zum Modell

- $t_\alpha(\varphi)$ Zeit, die zum Durchlaufen von u_α benötigt wird, wenn auf u_α der Strom $\varphi = \varphi_\alpha$ fließt.

- $T_\beta^{ik}(\Phi)$ Zeitbedarf, um a^i von a^k auf dem Pfad U_β zu erreichen. (Die Indizes könnnen weggelassen werden, falls a^i Zielknoten und a^k Ausgangsknoten von Φ_β ist.

- Der Zeitaufwand hängt von den Strömen auf U_β ab.

- Der Aufwand für den ganzen Pfad setzt sich aus dem für die betreffenden Bögen additiv zusammen, und es gilt für Zeiten zwischen Ausgangs- und Zielknoten:

$$T_\beta(\Phi) = \sum_\alpha c_{\alpha\beta} t_\alpha(\varphi_\alpha) \qquad (2.4)$$

- Ferner definieren wir als jeweils ungünstigste Zeit

$$\left|T^{ik}(\Phi)\right| = \max\left\{T_{\beta}^{ik}(\Phi);\ \Phi_{\beta} \neq 0\right\} \tag{2.5}$$

und

$$\left|T_{\nu}(\Phi)\right| = \max\left\{T_{\beta}^{i_{\nu}k_{\nu}}(\Phi);\ \beta \in B_{\nu};\ \Phi_{\beta} \neq 0\right\} \tag{2.6}$$

wobei $a^{i_{\nu}}$ *und* $a^{k_{\nu}}$ die Ziel- bzw. Ausgangs-punkte der Pfade $\{U_{\beta}, \beta \in B_{\nu}\}$ seien.

- Für die Funktionen $t_\alpha(\varphi)$ treffen wir folgende Voraussetzungen:
    - $t_\alpha(\varphi) \geq 0$
    - $t_\alpha(\varphi)$ ist monoton nicht fallend
    - $t_\alpha(\varphi)$ ist linksseitig stetig, d.h.:

$$\lim_{\substack{\varphi \to \varphi_0 \\ \varphi < \varphi_0}} t_\alpha(\varphi) = t_\alpha(\varphi_0) \qquad (2.7)$$

Optimalität

Welche Stromverteilung bringt für alle Verkehrs-teilnehmer möglichst kurze Fahrzeiten?

Zum Beantworten der Frage betrachten wir Netze mit:

- einer Quelle
- einem Ziel

Wie günstig die Ströme verteilt sind, bemessen wir nach der Zeit, die im ungünstigsten Fall zum Erreichen des Zieles benötigt wird.

- Die Zeit ist durch die Gleichung

$$\left|\mathbf{T}_{\nu}(\Phi)\right| = \mathbf{max}\left\{\mathbf{T}_{\beta}^{\mathbf{i}_{\nu}\mathbf{k}_{\nu}}(\Phi); \beta \in \mathbf{B}_{\nu}; \Phi_{\beta} \neq \mathbf{0}\right\}$$

  gegeben.

- $|\Phi| = \chi$ ist fest angegebene Grösse

Definition:

Der Flus Φ heißt optimal, wenn die Relation

$$|\mathbf{T}(\Phi)| \leq |\mathbf{T}(\Psi)| \qquad \mathbf{(3.1)}$$

für alle ψ mit

$$|\Phi| \leq |\Psi| \qquad \mathbf{(3.2)}$$

gilt.

An diesem Grundkonzept und den Ergeb-
nissen wird sich nichts ändern, wenn für
die Güte einer Verteilung die mittlere Fahrzeit

$$\frac{\mathbf{1}}{|\Phi|}\sum_{\beta}\Phi_{\beta}\mathbf{T}_{\beta}(\Phi)$$

und nicht die maximale Fahrzeit $|\mathbf{T}(\Phi)|$
bestimmend wäre.

Allgemein kann man nur fordern, dass die Defination der Optimalität in folgendem Sinne konsistent ist:

Es soll unmöglich sein, optimale Ströme so umzutauschen, dass sich für jeden Fahrer der Zeitaufwand vermindert.

Satz:

Für alle Bögen sei $\mathbf{t}_\alpha(\varphi)$ halbstetig nach unten für $\mathbf{0} \leq \varphi \leq \chi$. Dann existiert ein optimaler Fluss mit $|\Phi| = \chi$.

Zum Beweis betrachtet man eine Minifolge $\Phi^{(\mathbf{n})}$ mit $\mathbf{lim}\left|\Phi^{(\mathbf{n})}\right| = \chi$.

Da die Pfade keine Zyklen enthalten, gilt

$$\mathbf{0} \le \Phi_\beta^{(n)} \le \chi \quad \text{und} \quad \mathbf{0} \le \Phi_\alpha^{(n)} \le \chi$$

Man kann wegen der Beschränkheit einer Teilfolge $\Phi^{(n_\nu)}$ mit konvergenten Werten für $\Phi_\beta^{(n_\nu)}$ auswählen.

Es sei $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Phi_\beta^{(n_\nu)} = \Phi_\beta^*$

$$\underset{(2.4)\ \text{und}\ (2.7)}{\Rightarrow} \qquad T_\beta\left(\Phi^*\right) \le \lim_{\nu \to \infty} T_\beta\left(\Phi^{(n_\nu)}\right) \qquad \textbf{(3.4)}$$

Sei nun U_β ein Pfad, für den $\Phi_\beta^* \neq 0$ ist.

Dann ist für hinreichend großes ν auch $\Phi_\beta^{(n_\nu)} \neq 0$

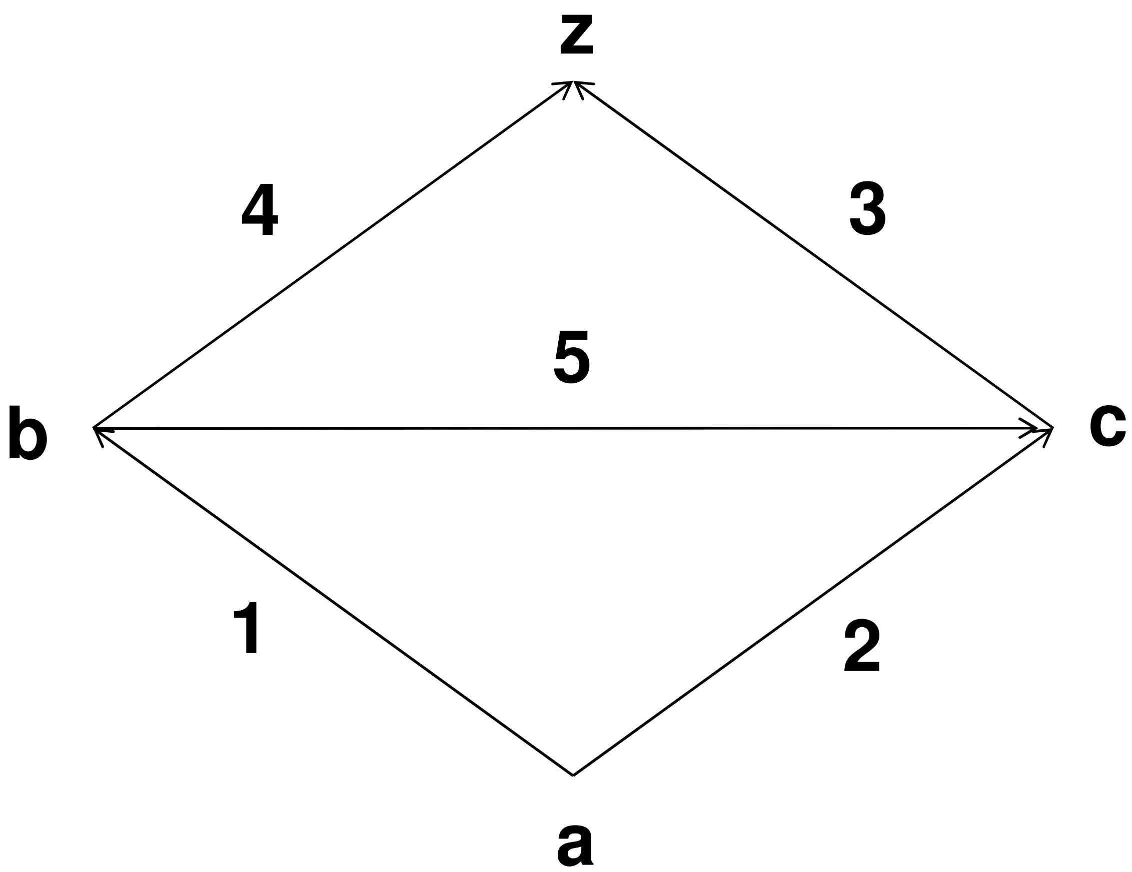
Für die Extremalfolge gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\beta\left(\Phi^{(n_\nu)}\right) \leq \lim_{\nu\to\infty} \left| T\left(\Phi^{(n^\nu)}\right) \right| = \inf\left\{ \left|T(\Phi)\right| ; \left|\Phi\right| = \chi \right\} \quad (3.5)$$

Wegen (3.4) und (3.5) ist Φ^* eine optimale Strom-verteilung.

Modelspiel mit 4 Knoten

- Der Einfachheit halber sind die Zeiten $t_\alpha(\varphi)$ als lienare Funktionen angesetzt.
- Der Graph enthält keine Zyklen
- $$\begin{aligned} t_1(\varphi) &= t_3(\varphi) = 10\varphi \\ t_2(\varphi) &= t_4(\varphi) = 50 + \varphi \\ t_5(\varphi) &= 10 + \varphi \end{aligned} \tag{3.6}$$


z
4
3
5
b
c
1
2
a

- wenn von a nach z der Strom $|\Phi| = 2$

$$\Phi_{abcz} = 2, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 0, \quad |T(\Phi)| = 52.$$

- wenn von a nach z der Strom $|\Phi| = 6$

$$\Phi_{abcz} = 0, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 3, \quad |T(\Phi)| = 83.$$

- wenn von a nach z der Strom $|\Phi| = 20$

$$\Phi_{abcz} = 0, \quad \Phi_{abz} = \Phi_{acz} = 10, \quad |T(\Phi)| = 160.$$

Kritischer Strom

Jeder Fahrer ist bemüht, für sich den
güntigsten Pfad auszuwählen. Wir nehmen
an,
dass er die Informationen besitzt, die er zur
Bestimmung seiner Route benötigt.

Bei den Verkehrsdichten in a) und c) ist es am güntigsten, sich in den optimalen Strom einzuordnen. Im Fall b) mit $|\Phi| = \mathbf{6}$ liegen die Verhältnisse anders.

Der optimale Strom erstreckt sich über die Pfade (abz) und (acz). Aber es gibt einen Pfad, auf dem der Zeitaufwand geringer ist:

Es ist

$$\mathbf{T_{abcz}} = \mathbf{70} < \mathbf{83} = |\mathbf{T}(\Phi)|.$$

Angenommen der Strom nähme den optimalen Verlauf. Verkehrsteilnehmer, denen die Fahrzeiten auf verschiedenen Wegen bekannt werden, würden dann auf den Pfad (abcz) überwechseln und damit die Optimalität zerstören.

Wenn also zwei Verkehrsteilnehmer etwa durch Erfahrung über die Fahrzeiten informiert sind, werden sie nicht Pfade mit verschiedenen Fahrzeiten benutzen.

Deshalb halten wir die Annahme für realistisch, dass sich der Verkehrsstrom auf eine Verteilung einstellt, die wir als kritisch bezeichnen.

Definition:

Φ heißt kritischer Fluss, wenn für alle Pfade $\mathbf{U}_\beta$

$$\mathbf{T}_\beta(\Phi) = |\mathbf{T}(\Phi)|, \quad \text{falls} \quad \Phi_\beta \neq \mathbf{0}$$

und (*)

$$\mathbf{T}_\beta(\Phi) \geq |\mathbf{T}(\Phi)|, \quad \text{falls} \quad \Phi_\beta = \mathbf{0}$$

gilt.

Wir beschränken uns auf stetige Funktionen.
Bei halbstetigen Funktionen ist (*) zu ersetzen durch

$$\mathbf{T}^{-}_{\mathbf{ß}}(\Phi) \leq |\mathbf{T}(\Phi)|, \quad \text{falls } \Phi_{\mathbf{ß}} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}^{+}_{\mathbf{ß}}(\Phi) \geq |\mathbf{T}(\Phi)| \quad \text{für alle ß.}$$

$\mathbf{T}^{+}(\Phi)$ und $\mathbf{T}^{-}(\Phi)$ an Sprungstellen die oberen bzw. die unteren Grenzwerte.
Sie fallen in Stetigkeitspunkten mit $\mathbf{T}(\Phi)$ zusammen.

Jeder Pfad mit nichtverschwindendem Strom ist also kritisch im üblichen Sinne der Graphentheorie.

Anschaulich bedeutet die Kritikalität folgendes. Das Ziel wird auf allen Pfaden mit nicht verschwindendem Strom in der gleichen Zeit erreicht. Auf stromlosen Pfaden wäre der Zeitbedarf höchstens grösser.

Satz

Für kritische Ströme Φ gibt es zu jedem Knoten $\mathbf{a}^i$ eine Zahl τ^i derart, dass für alle über $\mathbf{a}^i$ führenden Pfade

$$\mathbf{T}_{\mathrm{ß}}^{i0}(\Phi) = \tau^i \qquad \text{falls } \Phi_{\mathrm{ß}} \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{ß}}^{i0}(\Phi) \geq \tau^i \qquad \text{falls } \Phi_{\mathrm{ß}} = \mathbf{0}$$

gilt. Ferner ist für alle Pfade $\mathbf{U}_{\mathrm{ß}}$, die von $\mathbf{a}^k$ nach $\mathbf{a}^i$ führen

$$\mathbf{T}_{\mathrm{ß}}^{ik}(\Phi) \geq \tau^i - \tau^k$$

und es ist

$$\tau^\infty = \left|\mathbf{T}(\Phi)\right|$$

Wenn die Bedingungen mit dem Ansatz

$$\tau^{i} = \mathbf{min}\left\{\mathbf{T}^{i0}_{\beta}(\Phi);\boldsymbol{\beta}\right\}$$

nicht gelten würden, dann gäbe es nämlich einen Pfad von $\mathbf{a}^{0}$ nach $\mathbf{a}^{\infty}$, für den $\mathbf{T}_{\beta} < |\mathbf{T}(\Phi)|$ wäre.

Ehe wir die Existenz kritischer Ströme und weitere Eigenschaften herleiten, nennen wir ein Zahlenergebnis für das Modellbeispiel.

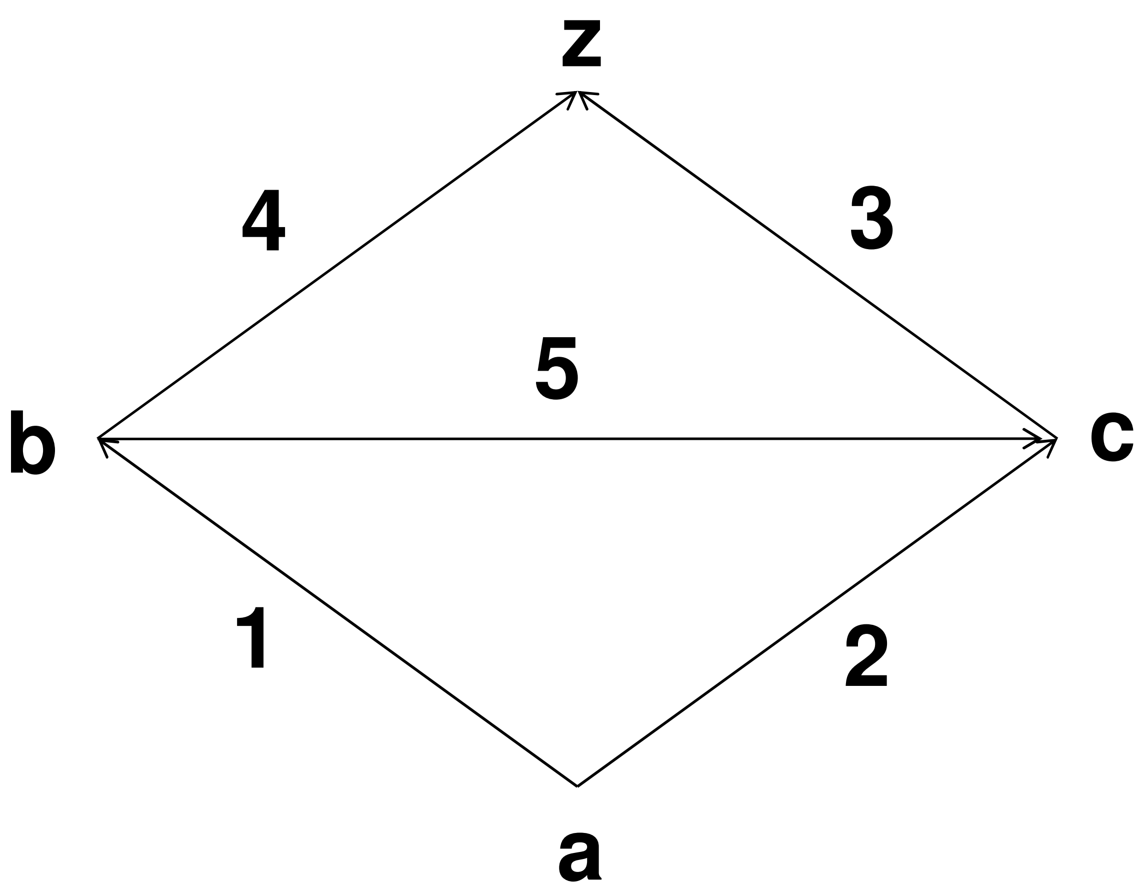
Im Fall b) mit $|\Phi| = \mathbf{6}$ ist der einzige kritische Fluß

$$\Phi_{\mathbf{abcz}} = \Phi_{\mathbf{abz}} = \Phi_{\mathbf{acz}} = \mathbf{2},$$

und es ist

$$\tau^{\mathbf{a}} = \mathbf{0},\ \ \tau^{\mathbf{b}} = \mathbf{40},\ \ \tau^{\mathbf{c}} = \mathbf{52},\ \ \tau^{\mathbf{z}} = \mathbf{92}.$$

Man erkennt also eine paradoxe Tatsache. Wenn in dem Netz des Modellbeispiels der Bogen $\mathbf{u_5}$ eliminiert wird….


z
4
3
5
b
c
1
2
a

…dann fällt der kritische Fluss mit dem optimalen zusammen; der Fluss wird dann also besser verteilt. Für die Verkehrspraxis bedeutet das : In ungünstigen Fällen kann durch eine Erweiterung des Straßennetzes der Zeitaufwand anwachsen.

Existenzsatz

- 5.1 Kritischer Strom

  Die Existenz von kritischen Stromverteilungen zu vorgegebenem Gesamtstrom lässt sich für stetige und monotone Zeitfunktionen durch die Zurückführung auf ein konvexes Programm zeigen.

- Die Funktionen:

$$f_\alpha(\varphi) = \int_0^\varphi t_\alpha(\psi)\,d\psi$$

sind für monotone $t_\alpha(\varphi)$ konvex.

$t_\alpha(\varphi)$: Zeit, die zum Durchlaufen von u_α benötigt wird, wenn auf u_α der Strom $\psi = \psi_\alpha$ fließt.

- Verallgemeinerung der Definition(keine Einschränkung nur auf Ströme mit nur einem einzigen Ausgangs-und Zielknoten) :
- Verallgemeinerte Definition:

ϕ heißt kritischer Fluss, wenn für alle Pfade U_β mit $\beta \in B_\nu$ und

$$T_\beta(\Phi) = |T_\nu(\Phi)|, \text{falls} \Phi_{\beta \neq 0},$$
$$T_\beta(\Phi) \geq |T_\nu(\Phi)|, \text{falls} \Phi_\beta = 0$$

gilt.

Existenzsatz

Die Funktionen $t_\alpha(\varphi)$ seien für $0 \le \varphi \le \chi = \sum_\nu \chi_\nu$ stetig und monoton. Dann sind die Lösungen des konvexen Programms:

$$\sum_\alpha f_\alpha(\varphi_\alpha) = \text{Min!}$$

$$\varphi_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\Phi_\beta$$

$$\sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta = \chi_\nu, \Phi_\beta \ge 0$$

kritische Ströme.

Beweis:

KKT-Bedingungen(mit Langrangeschen Parametern λ_ν und μ_β)

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} t_\alpha(\varphi_\alpha) - \lambda_\nu - \mu_\beta = 0$$

$$\sum_{\beta \in B_\nu} \Phi_\beta = \chi_\nu$$

$$\Phi_\beta \mu_\beta = 0$$

$$\Phi_\beta \geq 0, \mu_\beta \geq 0.$$

wegen 2.4 gilt:

$$T_\beta(\Phi) - \lambda_\nu = 0, \text{falls} \Phi_\beta \neq 0,$$

$$T_\beta(\Phi) - \lambda_\nu \geq 0, \text{falls} \Phi_\beta = 0$$

Also ist $\lambda_\nu = |T_\nu(\Phi)|$ und Φ ist ein kritischer Strom.

Folgerung:

- Die Menge der kritischen Ströme ist konvex.
- Gilt für mindestens einen Bogen u_α : die Funktion $t_\alpha(\varphi)$ bei $\varphi = \varphi_\alpha$ ist strikt monoton → die Lösung ist eindeutig
- Jeder Pfad verläuft über mindestens einen Bogen, für den $t(\varphi)$ überall strikt monoton ist

  → Eindeutigkeit

Bemerkung:

Warum lassen sich die kritischen Bedingungen mit einem Extremalprinzip in Berührung bringen?

Grund: Symmetrie des Modells: jeder Fahrer versursacht für andere die gleiche Zeitverzögerung wie der andere für ihn.

Symmetrie trifft für ein erweitertes Modell nicht zu : bei mehrspurigen Straßen ist von dem Fahrzeugtyp abhängig

→ Gruppiere die Ströme in Gruppen:

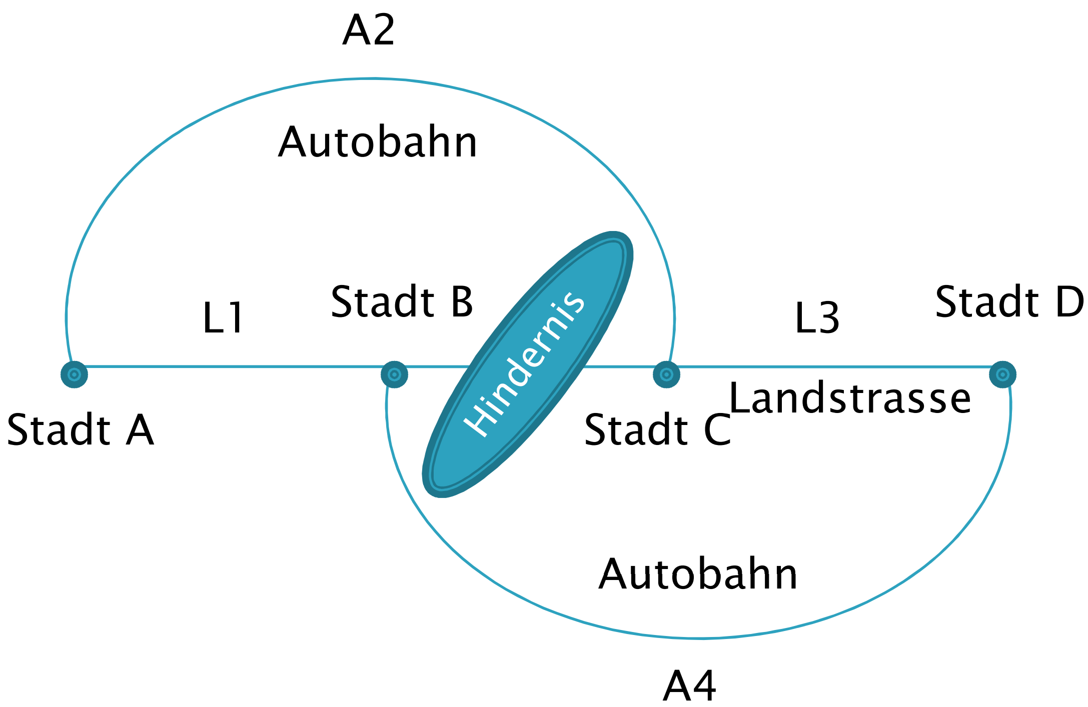
$$\varphi_\alpha = \sum_g \varphi^g{}_\alpha, \varphi_\beta = \sum_g \Phi^g{}_\beta$$

Der Zeitbedarf einer Gruppe richtet sich auch nach den Strömen der anderen Gruppen auf dem betreffenden Bogen:

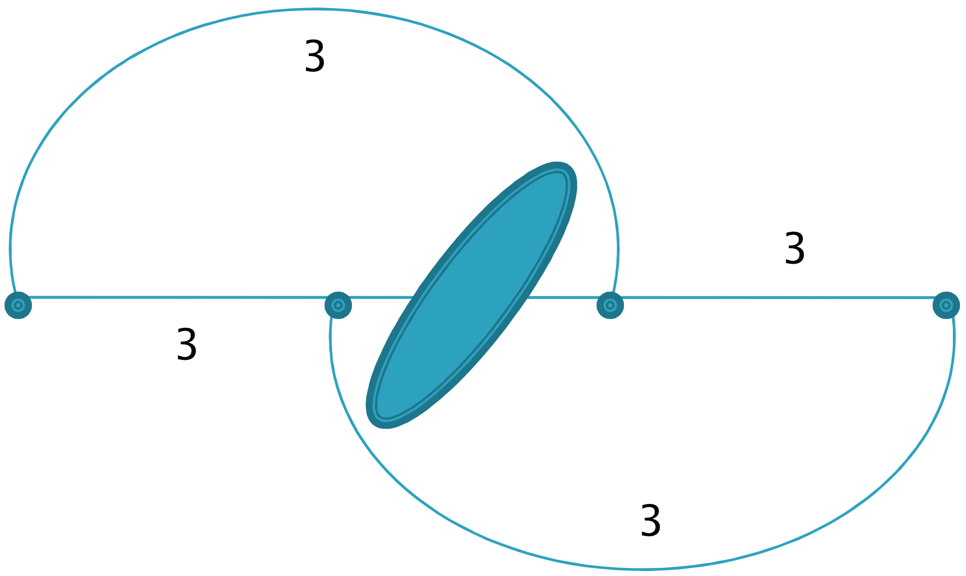
$$t_\alpha{}^g(\varphi) = t_\alpha{}^g\left(\varphi^1, \varphi^2, \ldots.\right).$$

Die Gleichungen lassen sich bei mehreren Gruppen nicht mehr mit einer Extremalaufgabe verknüpfen.

Ein Beispiel

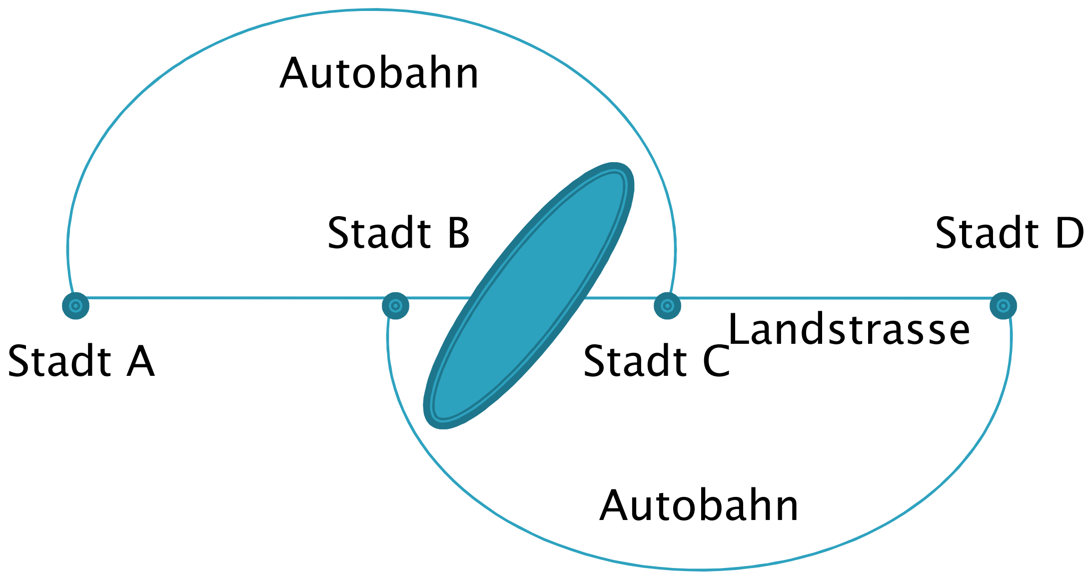


Fahrzeiten
Autobahnen: t(A2) = t(A4) = 50 + j Minuten
Landstrassen: t(L1) = t(L3) = 0 + 10j Minuten
j = Verkehrsfluss (in 1000 Fahrzeuge) [bei 3000 Fahrzeuge also j = 3]
Gesamtanzahl Fahrzeuge = 6000

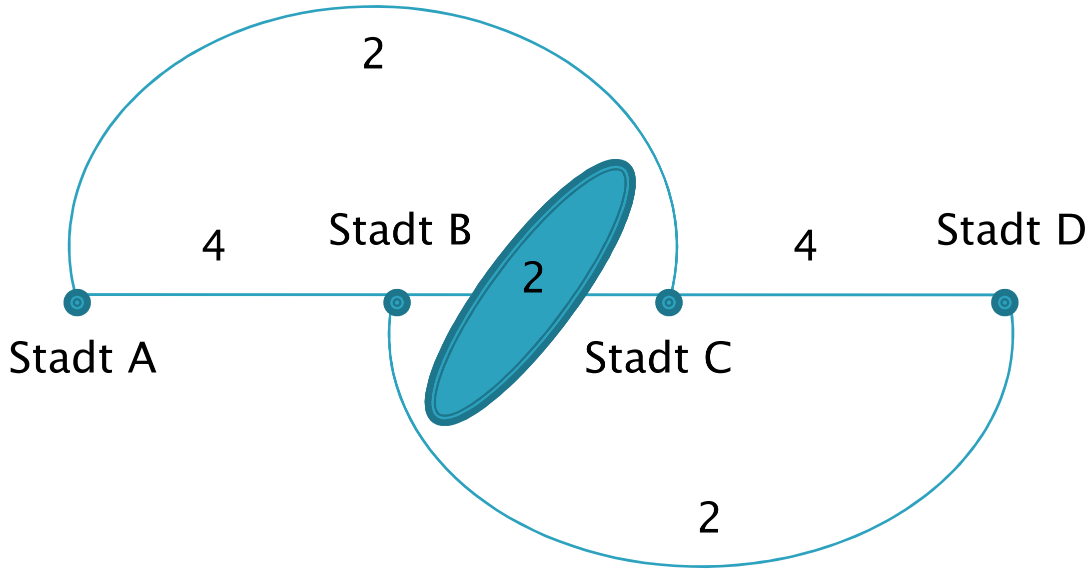


Fahrzeiten
Autobahnen: t(A2) = t(A4) = 50 + 3 Minuten
Landstrassen: t(L1) = t(L3) = 0 + 10 x 3 Minuten

Gesamtstrecke: 83 Minuten

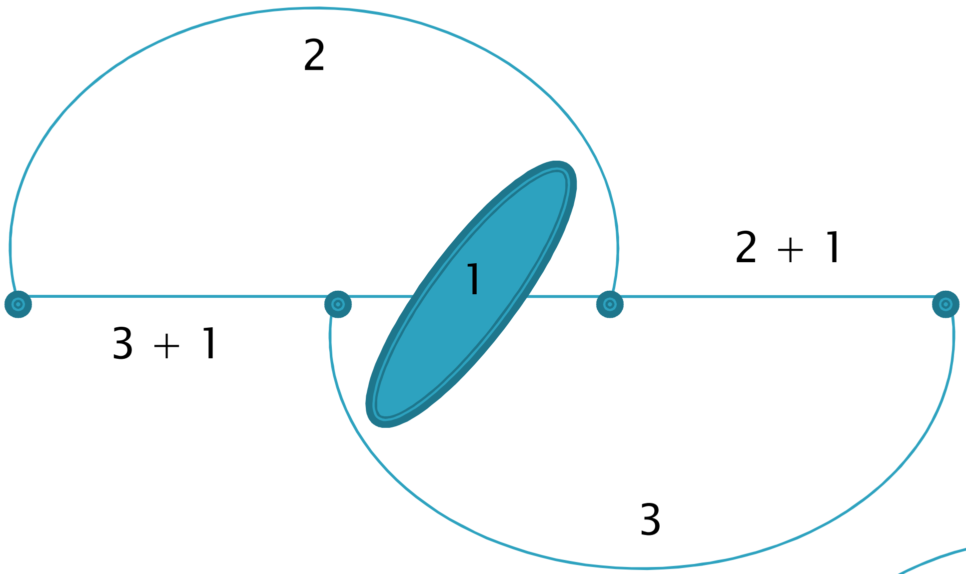


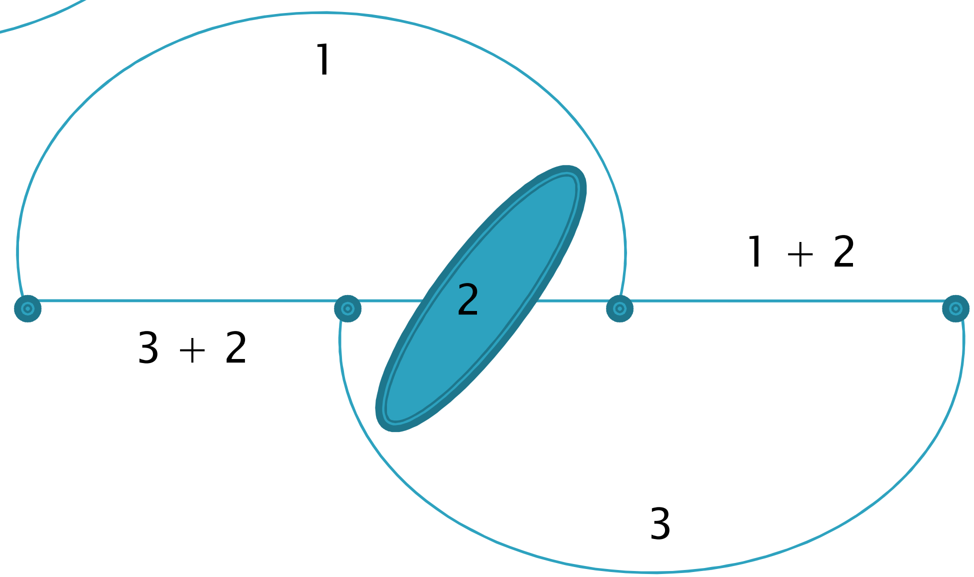
Fahrzeit für den Tunnel
$t(BC) = 10 + j$ Minuten



Fahrzeiten
t(ACD) = t(ABD) = 50 + 2 + 10 x 4 = 92 Minuten
t(ABCD) = 2 x 10 x 4 + 10 + 2 = 92 Minuten

z.B.





- 3000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 93 Minuten
- 2000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 82 Minuten
- 1000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 81 Minuten

- 3000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 103 Minuten
- 1000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 81 Minuten
- 2000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 92 Minuten

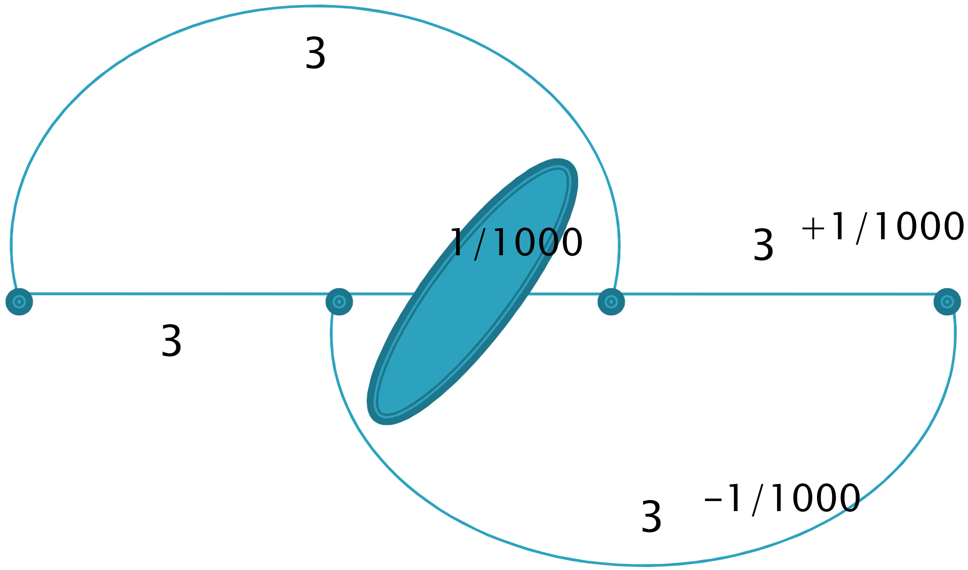
- 2000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 102 Minuten
- 1000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 91 Minuten
- 3000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 103 Minuten

- 2000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 82 Minuten
- 3000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 93 Minuten
- 1000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 81 Minuten

- 1000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 91 Minuten
- 2000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 102 Minuten
- 3000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 103 Minuten

- 1000 Fahrer wählen die Strecke ABD und benötigen dann 81 Minuten
- 3000 Fahrer wählen die Strecke ACD und benötigen dann 103 Minuten
- 2000 Fahrer wählen die Strecke ABCD und benötigen dann 92 Minuten

Ein Fahrer durch den Tunnel ...



t(ABCD) = 10 x 3 + 10 + 1/1000 + 10 x (3 + 1/1000) = 70,011 Minuten
t(ACD) = 50 + 3 + 10 x (3 + 1/1000) = 83,01 Minuten
t(ABD) = 10 x 3 + 50 + (3 – 1/1000) = 82,999 Minuten

Durchschnittsfahrzeit:
(1 x 70,011 Min. + 3000 x 83,01 Min. + 2999 x 82,999 Min.) / 6000
= 83,00233533 Minuten

- Würden alle die Strecke ignorieren, wäre die Fahrzeit für alle Teilnehmer wieder 83 Minuten.

- Die Versuchung, die freie Strecke zu nutzen und so die Fahrzeit von 83 auf 70 Minuten zu reduzieren, führt dann aber in das Dilemma zurück.

- Die einzige Lösung wäre die Neubaustrecke wieder abzureissen.