LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Common Knowledge

Projekt im Rahmen der Vorlesung Spieltheorie WiSe 08/09

Einführung: Wissensmodell
Gemeinsames Wissen
Anwendungen

Morris M. Burkhardt & Andreas Rösch

Einführung: Wissensmodell

Gemeinsames Wissen

Anwendungen

Übersicht Wissensmodell

Erste mengentheoretische Formulierung durch Robert Aumann in 1976.

Ein Wissensmodell ist ein Tupel (Ω,P,K), bestehend aus…

- einer Menge Ω von Zuständen
- einer Informationsfunktion P
- einer Wissensfunktion K

Die Menge aller Zustände

Mit Ω bezeichnet man die *Menge aller Zustände.*

Mögliche Interpretationen:

- Ein Zustand $\omega \in \Omega$ beschreibt die Umstände, die der Entscheidungsträger in einem bestimmten Entscheidungsproblem für relevant hält.
- Ein Zustand $\omega \in \Omega$ beschreibt die ganze Welt mit den Informationen und Überzeugungen des Entscheidungsträgers, sowie seinen Handlungen.

Die Informationsfunktion

Definition: (Informationsfunktion)

Eine *Informationsfunktion* für die Menge Ω aller Zustände ist eine Funktion $P: \Omega \to 2^{\Omega}$, die jedem Zustand $\omega \in \Omega$ eine nichtleere Teilmenge von Zuständen $P(\omega) \subseteq \Omega$ zuordnet.

Interpretation:

Im Zustand $\omega \in \Omega$ ist der Entscheidungsträger davon überzeugt, dass sich der tatsächliche Zustand in der Menge $P(\omega) \subseteq \Omega$ befindet.

Die partitionierende Informationsfunktion

Definition: (partitionierende Informationsfunktion)

Eine Informationsfunktion P für die Menge Ω aller Zustände heißt *partitionierend (engl. partitional)* wenn es eine Partition von Ω gibt, so dass für jedes $\omega \in \Omega$ gilt, dass P(ω) jenes Element der Partition ist, welches ω enthält.

Interpretation:

Im Fall einer partitionierenden Informationsfunktion gilt $\omega \in$ P(ω), also ist der Entscheidungsträger nicht nur davon überzeugt, sondern weiß sogar, dass sich der tatsächliche Zustand in P(ω) befindet.

Die partitionierende Informationsfunktion

Satz:

Eine Informationsfunktion ist partitionierend $\Leftrightarrow$

(P1) $\forall\, \omega \in \Omega$ gilt: $\omega \in P(\omega)$

(P2) $\omega_1 \in P(\omega_2) \Rightarrow P(\omega_1) = P(\omega_2)$

Interpretation:

- (P1): Ein Entscheidungsträger schließt niemals den tatsächlichen Zustand ω aus der Menge der plausiblen Zustände $P(\omega)$ aus.
- (P2): Ein Entscheidungsträger verwendet die (In-)Konsistenz von Zuständen um Rückschlüsse auf den tatsächlichen Zustand zu machen.

Ereignis

Definition: ((bekanntes) Ereignis)

Sei Ω Menge der Zustände, P partitionierende Informationsfunktion, $\omega \in \Omega$.

- Eine Teilmenge E $\subseteq \Omega$ nennt man *Ereignis*.
- Ein Ereignis E heißt einem Entscheidungsträger *bekannt*, wenn für ihn im Zustand ω gilt: P(ω) $\subseteq$ E.

Interpretation:

Wenn P(ω) $\subseteq$ E gilt, *weiß* der Entscheidungsträger, dass der tatsächliche Zustand ein Zustand aus dem Ereignis E ist, daher der Begriff "bekannt".

Die Wissensfunktion

Definition: (Wissensfunktion)

Sei P partitionierende Informationsfunktion und $E \subseteq \Omega$ Ereignis.
Dann nennt man $K: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$, $K(E) = \{\omega \in \Omega \mid P(\omega) \subseteq E\}$ die zu P gehörige Wissensfunktion.

Interpretation:

Für jedes Ereignis $E \subseteq \Omega$ ist die Menge K(E) die Menge aller Zustände in denen der Entscheidungsträger E kennt.

Beispiel: Augenfarben 1

Auf einer Insel leben 6 Personen, die entweder gelbe (0) oder blaue (1) Augen haben. Jeder Insulaner sieht jeweils die Augenfarbe der anderen 5 Personen, kennt aber seine eigene nicht und kann diese auch nicht sehen.

Modell im Ausgangszustand:

Menge aller Zustände:

$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \in \{0,1\}^6\}$

Informationsmenge von Person i:

$P_i(\omega) = \{(\omega_{-i},0) , (\omega_{-i},1)\}$

Beispiel: Augenfarben 1

Vorgehensweise:

Eines Tages kommt eine siebte Person auf die Insel. Sie stellt den sechs Insulanern das folgende Rätsel:

"Jeder von Euch hat entweder gelbe oder blaue Augen, wobei mindestens einer blaue Augen hat. Ich werde von eins ausgehend langsam ganzzahlig nach oben zählen. Jede Zahl läutet eine neue Runde ein. Sobald jemand in einer Runde seine Augenfarbe kennt, soll er dies öffentlich mitteilen, bevor die nächste Runde eingeläutet wird!"

[NB: Das Spiel wurde mit vier blauäugigen durchgeführt]

Beispiel: Augenfarben 1

Modell der 1. Runde:

Menge der noch möglichen Zustände:

$\Omega^1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \in \{0,1\}^6 \mid \sum_{i=1}^6 \omega_i \geq 1\}$

Informationsmenge von Person i:

- Falls Person i mindestens eine Person mit blauen Augen sieht:
  $P_i^1(\omega) = \{(\omega_{-i},0)\ ,\ (\omega_{-i},1)\}$ ✓
- Falls Person i niemanden mit blauen Augen sieht:
  $P_i^1(\omega) = \{(\omega_{-i},1)\}$

Sei $A^1 := \{\omega \mid \sum_{i=1}^6 \omega_i = 1\}$. Dann gilt: $\Omega^2 = \Omega^1 \setminus A^1$.

Beispiel: Augenfarben 1

Modell der 2. Runde:

Menge der noch möglichen Zustände:

$\Omega^2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \in \{0,1\}^6 \mid \sum_{i=1}^{6} \omega_i \geq 2\}$

Informationsmenge von Person i:

- Falls Person i mindestens zwei Personen mit blauen Augen sieht:
  $P_i^2(\omega) = \{(\omega_{-i},0)\ ,\ (\omega_{-i},1)\}$ ✓
- Falls Person i genau eine Person mit blauen Augen sieht:
  $P_i^2(\omega) = \{(\omega_{-i},1)\}$

Sei $A^2 := \{\omega \mid \sum_{i=1}^{6} \omega_i = 2\}$. Dann gilt: $\Omega^3 = \Omega^2 \setminus A^2$.

Beispiel: Augenfarben 1

Modell der 3. Runde:

Menge der noch möglichen Zustände:

$\Omega^3 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \in \{0,1\}^6 \mid \sum_{i=1}^6 \omega_i \geq 3\}$

Informationsmenge von Person i:

- Falls Person i mindestens drei Personen mit blauen Augen sieht:
  $P_i^3(\omega) = \{(\omega_{-i},0) , (\omega_{-i},1)\}$ ✓
- Falls Person i genau zwei Person mit blauen Augen sieht:
  $P_i^3(\omega) = \{(\omega_{-i},1)\}$

Sei $A^3 := \{\omega \mid \sum_{i=1}^6 \omega_i = 3\}$. Dann gilt: $\Omega^4 = \Omega^3 \setminus A^3$.

Beispiel: Augenfarben 1

Modell der 4. Runde:

Menge der noch möglichen Zustände:

$\Omega^4 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \in \{0,1\}^6 \mid \sum_{i=1}^6 \omega_i \geq 4\}$

Informationsmenge von Person i:

- Falls Person i mindestens vier Personen mit blauen Augen sieht:
  $P_i^4(\omega) = \{(\omega_{-i},0)\ ,\ (\omega_{-i},1)\}$
- Falls Person i genau drei Person mit blauen Augen sieht:
  $P_i^4(\omega) = \{(\omega_{-i},1)\}$ ✓

Es kennen jetzt alle blauäugigen ihre Augenfarbe!

Beispiel: Augenfarben 1

Schlussbemerkungen:

- Jeder Insulaner wusste schon immer, dass es blauäugige gibt.

- Erst durch die Ansage wird dies zu common knowledge:
  In der 3. Runde - weiß jede blauäugige Person,
  - dass eine weitere blauäugige Person weiß,
  - dass eine weitere blauäugige Person weiß,
  - dass eine weitere Person blaue Augen hat.

  Aber, niemand weiß, dass es eine vierte blauäugige Person mit diesem Wissen gibt – solange die 4. Runde nicht eingeläutet wird.

Gemeinsames Wissen

Informal:

Wenn in einem Zustand jeder Spieler das Ereignis E kennt und…

- jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt, und
- jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt, und
- jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt, und
- jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt, und
- …

dann sagt man E ist *gemeinsames Wissen* zwischen allen Spielern.

Vom Wissen zum gemeinsamen Wissen

Sei $N = \{1,\dots,n\}$ Menge der Spieler, $P_i(\omega)$ Informationsfunktion von Spieler i.

- Das Ereignis "jeder Spieler kennt E" ist:
  $K^1_N(E) := \{\omega \mid \cup_{i \in N} P_i(\omega) \subseteq E\}$
- Das Ereignis "jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt" ist:
  $K^2_N(E) := \{\omega \mid \cup_{i \in N} P_i(\omega) \subseteq K^1_N(E)\}$
- Das Ereignis "jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt" ist:
  $K^3_N(E) := \{\omega \mid \cup_{i \in N} P_i(\omega) \subseteq K^2_N(E)\}$
- …

Gemeinsames Wissen

Definition: (gemeinsames Wissen zwischen n Spielern)

Sei Ω die Menge aller Zustände, $N = \{1,\dots,n\}$ die Menge aller Spieler und $P_i(\omega)$ die Informationsfunktion von Spieler i. Weiter sei $E \subseteq \Omega$ ein Ereignis und definiere:

$$K^1_N(E) := \{\omega \mid \cup_{i\in N} P_i(\omega) \subseteq E\},$$

$$K^{m+1}_N(E) := \{\omega \mid \cup_{i\in N} P_i(\omega) \subseteq K^m_N(E)\} \ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Das Ereignis E heißt *gemeinsames Wissen zwischen Spieler 1,…,n im Zustand $\omega \in \Omega$*, wenn $\omega \in K^\infty_N(E)$.

Interpretation:

Im Zustand ω kennt jeder Spieler E und weiß, dass jeder Spieler weiß, dass jeder Spieler E kennt, und...

Gemeinsames Wissen zwischen zwei Spielern

Definition: (gemeinsames Wissen zwischen zwei Spielern)

Sei Ω die Menge aller Zustände, K_1 bzw. K_2 Wissensfunktion von Spieler 1 bzw. Spieler 2.
Dann heißt das Ereignis $E \subseteq \Omega$ *gemeinsames Wissen zwischen Spieler 1 und Spieler 2 im Zustand* $\omega \in \Omega$, wenn ω in jeder Menge der Folge $K_1(E)$, $K_2(E)$, $K_1(K_2(E))$, $K_2(K_1(E))$, $K_1(K_2(K_1(E)))$, $K_2(K_1(K_2(E)))$,… enthalten ist.

Der Einfachheit halber wurde dies hier nur für zwei Spieler formuliert. Die Definition kann aber ganz analog auf mehrere Spieler erweitert werden.

Augenfarben 2

Insel mit drei Bewohnern, die gelbe (0) oder blaue (1) Augen haben.

$N = \{1,2,3\}$, $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Jeder Spieler kennt jeweils die Augenfarben der anderen beiden Spieler.

Informationspartitionen:

$\mathcal{P}_1 = \{\{(0,0,0),(1,0,0)\}, \{(0,0,1),(1,0,1)\}, \{(0,1,0),(1,1,0)\}, \{(0,1,1),(1,1,1)\}\}$

$\mathcal{P}_2 = \{\{(0,0,0),(0,1,0)\}, \{(1,0,0),(1,1,0)\}, \{(0,0,1),(0,1,1)\}, \{(1,0,1),(1,1,1)\}\}$

$\mathcal{P}_3 = \{\{(0,0,0),(0,0,1)\}, \{(0,1,0),(0,1,1)\}, \{(1,0,0),(1,0,1)\}, \{(1,1,0),(1,1,1)\}\}$

Frage:

In welchen Zuständen ist das Ereignis E := "mindestens ein Bewohner hat blaue Augen" gemeinsames Wissen zwischen den Spielern?

Augenfarben 3

Beispiel wie vorheriges.

Zusätzliche Information: Wenn keiner blaue Augen hat, so wird dies allen bekannt gegeben.

Informationspartitionen:

$\mathcal{P}_1 = \{\{(0,0,0)\}\ ,\ \{(1,0,0)\}\ ,\ \{(0,0,1),(1,0,1)\}\ ,\ \{(0,1,0),(1,1,0)\}\ ,\ \{(0,1,1),(1,1,1)\}\}$

$\mathcal{P}_2 = \{\{(0,0,0)\}\ ,\ \{(0,1,0)\}\ ,\ \{(1,0,0),(1,1,0)\}\ ,\ \{(0,0,1),(0,1,1)\}\ ,\ \{(1,0,1),(1,1,1)\}\}$

$\mathcal{P}_3 = \{\{(0,0,0)\}\ ,\ \{(0,0,1)\}\ ,\ \{(0,1,0),(0,1,1)\}\ ,\ \{(1,0,0),(1,0,1)\}\ ,\ \{(1,1,0),(1,1,1)\}\}$

Frage:

In welchen Zuständen ist das Ereignis E := "mindestens ein Bewohner hat blaue Augen" gemeinsames Wissen zwischen den Spielern?

Sich darüber einigen, uneinig zu sein

Fragestellung:

Kann es gemeinsames Wissen zwischen zwei Individuen mit dem selben anfänglichen Überzeugungen sein, dass das Individuum 1 einem Ereignis die Wahrscheinlichkeit p_1 und das Individuum 2 die Wahrscheinlichkeit $p_2 \neq p_1$ zuordnet?

Antwort:

Im Allgemeinen ist es möglich, wenn die Individuen über verschiedene Informationen verfügen. Jedoch ist es unmöglich, falls die Informationsfunktion partitionierend ist.

E-Mail Spiel

$N = \{1,2\}$; $\Omega = \{(Q_1,Q_2) \mid Q_1=Q_2 \;\; Q_1=Q_2+1\}$; $L>M>1$

Matrix a

	A	B
A	M,M	1,-L
B	-L,1	0,0

Wahrscheinlichkeit 1-p

Matrix b

	A	B
A	0,0	1,-L
B	-L,1	M,M

Wahrscheinlichkeit p

Informationspartitionen: $\mathcal{P}_1 = \{\{a\},\{b\}\}$ und $\mathcal{P}_2 = \{\{a,b\}\}$

Informationsmengen im Zustand (q,q): $P_1(q,q) = \{(q,q),(q,q-1)\}$

$P_2\,(q,q) = \{(q,q),(q+1,q)\}$

Common Knowledge in der Spieltheorie

- Spiele mit vollständiger Information: Struktur des Spiels & Auszahlungen sind common knowledge
- Für IEDS: Rationalität ist common knowledge
- Teispielperfektheit: Rationalität ist common knowledge
- Spiele mit unvollständiger Information: Wahrscheinlichkeitsverteilung ist common knowledge