

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Aufgabe 7

Das Konvergenzverhalten des komplexen Newton-Verfahrens zur Bestimmung von Nullstellen analytischer Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z_0 \in \mathbb{C}, \quad z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

soll für Startwerte z_0 im Rechteck $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ untersucht werden.

- (a) Starten Sie dazu das Verfahren auf einem homogenen rechteckigen Gitter mit $M \cdot N$ Punkten und brechen Sie die Iteration jeweils ab, wenn $|z_{k+1} - z_k| \leq \varepsilon |z_k|$. Speichern Sie den so gefundenen Wert z_k in einem Vektor komplexer Zahlen ab, allerdings nur dann, wenn er von früher abgespeicherten Werten um mindestens $D > 0$ abweicht. In einem anderen Vektor soll festgehalten werden, wie oft Konvergenz gegen jeden dieser abgespeicherten Werte eingetreten ist. Reservieren Sie sich die Komponente 0 dieses Vektors für den Fall, dass numerisch keine Konvergenz beobachtet wird, d.h. eine vorgegebene Iterationsschranke *itmax* überschritten wird.

Geben Sie die berechneten Grenzwerte mit den Häufigkeitswerten aus und drucken Sie, wie oft numerisch Divergenz beobachtet wurde.

- (b) Zur graphischen Darstellung des Einzugsbereichs der einzelnen Nullstellen können Sie das Format P6 oder P3 (sehr speicheraufwendig!) einer PPM-Datei verwenden (man 5 ppm oder https://de.wikipedia.org/wiki/Portable_Anymap). Erstellen Sie einen Vektor mit mindestens 7 vordefinierten Farben (P6: Darstellung des RGB-Wert mit 3 Byte) und speichern Sie den der Nullstelle entsprechenden Farbwert in der PPM-Datei. Für Nichtkonvergenz soll die Farbe weiß verwendet werden.

Konvertieren Sie die PPM-Datei in eine JPG- oder GIF-Datei, z.B. mit dem Kommando `convert` aus ImageMagick, oder verwenden Sie `gimp` (GNU Image Manipulation Program) zum Anzeigen der Datei unter Windows.

Verwenden Sie bei der Programmierung möglichst eine Funktion für das Newtonverfahren mit Parametern für f und f' , und eine Klasse zur Durchführung der Nullstellenberechnung auf dem Gitter, deren Konstruktor u.a. die Gitterdaten und Funktionszeiger auf f und f' initialisiert. Eine weitere Komponentenfunktion soll die Berechnungen auf dem Gitter durchführen, den Häufigkeitsvektor erstellen und ausgeben, und die Ausgabedatei befüllen.

Rechnen Sie folgende Beispiele mit $\varepsilon = 10^{-12}$ und $itmax = 200$ und geeigneten einzulesenden Werten für a, b, c, d, M, N und D (z.B. -4 4 -4 4 500 500 0.001)

- (i) $f(z) = z^3 - 1$
(ii) $f(z) = z^3 + 3z^2 - i$
(iii) $f(z) = z^5 - 2iz^4 - 13z^3 + 14iz^2 + 24z - 1$
(iv) $f(z) = e^z(z^3 - 1)$