Tschebyschew-Polynome

Definition (Tschebyschew-Polynom 1. Art)

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x) \quad (x \in [-1, 1];\ n \in \mathbb{N}_0)$$

Rekursionsformel

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \\ &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Bew.: $\cos((n+1)\varphi) = \cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\sin\varphi$
$\cos((n-1)\varphi) = \cos(n\varphi)\cos\varphi + \sin(n\varphi)\sin\varphi$
Bhpt. folgt durch Addition und $\varphi := \arccos(x)$

Durch vollständige Induktion: T_n Polynom vom Grad n

Bsp.: $T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x$

Tschebyschew-Polynome II

Orthogonalität bzgl. Gewichtsfunktion

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)\,T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \alpha_i \delta_{ij}, \quad \alpha_i = \begin{cases} \pi & i = 0 \\ \frac{\pi}{2} & i \neq 0 \end{cases}$$

Bew.: $\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{\pi} \cos(i\varphi)\cos(j\varphi)d\varphi$

Diskrete Orthogonalitätsrelationen

Sei $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $\quad (k = 0, \dots, n)$ $\quad$ (Nullstellen von T_{n+1}).
Dann gilt für $i, j = 0, \dots, n$:

$$\langle T_i, T_j \rangle := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T_i(x_k)\,T_j(x_k) = \beta_i \delta_{ij}, \quad \beta_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{1}{2} & i \neq 0 \end{cases}$$

Diskrete Tschebyschew-Entwicklung

Satz

Sei p Polynom vom Höchstgrad n. Dann gilt:

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k, \quad c_k = \frac{\gamma_k}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p\Bigg(\underbrace{\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)}_{x_j}\Bigg) \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)} k\pi\right)$$

mit $\gamma_k = \frac{1}{\beta_k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k \neq 0 \end{cases}$

Bew.: $p = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j$, weil $T_0, \ldots, T_n$ Basis von $\mathcal{P}_n$.

$$\langle p, T_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} c_j \langle T_j, T_k \rangle = c_k \beta_k$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p(x_j) T_k(x_j) = c_k \beta_k$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)\right) \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)} k\pi\right) = c_k \beta_k$$

Diskrete Tschebyschew-Entwicklung II

Corollar

Seien $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ und $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(j=0,\dots,n)$. Dann gilt für das eindeutig bestimmte Polynom p mit Höchstgrad n und

$$p(x_j) = y_j \quad (j = 0, \dots n)$$

(Interpolationspolynom an den Stützstellen $x_0, \dots x_n$ zu den Stützwerten $y_0, \dots, y_n$) :

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k, \quad c_k = \frac{\gamma_k}{n+1} \sum_{j=0}^{n} y_j \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)} k\pi\right) \text{ mit } \gamma_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2 & k\neq 0 \end{cases}$$

Anmerkung

- Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Man kann für das Interpolationspolynom p vom Höchstgrad $n \leq 100$ an f mit den Stützstellen $x_0, \dots x_n$ zeigen:

  $$\|f - p\|_\infty \leq 5 \cdot \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty$$

Clenshaw-Curtis-Rekursion

Ziel Für gegebene $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ effiziente Berechnung von

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x) \quad (x \in [-1, 1])$$

Idee Verwende Rekursion

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (x \in [-1, 1],\ n \geq 2)$$

Im folgenden sei $x \in \mathbb{R}$ fest.

Problem: Der naheliegende Ansatz $s_n := \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

führt leider zu nichts.

Denn:

$$\begin{aligned} s_n - 2s_{n-1}x + s_{n-2} \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n-2} c_i \left[T_i(x) - 2xT_i(x) + T_i(x)\right] \\ &\quad + c_n T_n(x) + c_{n-1} T_{n-1}(x)(1 - 2x) \end{aligned}$$

Stünde in der Summe $c_i \left[T_i(x) - 2xT_{i-1}(x) + T_{i-2}(x)\right]$, sähe das evtl. anders aus.

Clenshaw-Curtis-Rekursion II

Abhilfe Modifiziere zunächst die Definition von s_{n-1} und s_{n-2}.

Sei ab jetzt $x \in \mathbb{R}$ fest *und* $n \geq 2$ fest.

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x), \quad s_{n-1} := \sum_{i=1}^{n} c_i T_{i-1}(x), \quad s_{n-2} := \sum_{i=2}^{n} c_i T_{i-2}(x)$$

Dann:

$$\begin{aligned} s_n - 2s_{n-1}x + s_{n-2} &= \sum_{i=2}^{n} c_i \left[T_i(x) - 2xT_{i-1}(x) + T_{i-2}(x)\right] \\ &\quad + c_0 T_0(x) + c_1(T_1(x) - 2xT_0(x)) \\ &= c_0 - c_1 x \qquad (*) \end{aligned}$$

Frage: Lässt sich das fortsetzen, z.B. für s_{n-1}?

Sei ab jetzt $n \geq 3$ fest und $s_{n-3} := \sum_{i=3}^{n} c_i T_{i-3}(x)$.

Wegen $s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i T_{i-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} T_i(x)$ folgt aus $(*)$ mit den Ersetzungen $n \to n-1$, $c_i \to c_{i+1}$ (oder durch Nachrechnen)

$$s_{n-1} - 2xs_{n-2} + s_{n-3} = c_1 - c_2 x$$

Clenshaw-Curtis-Rekursion III

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \in \mathbb{R}$ und $s_{n-j} := \sum_{i=j}^{n} c_i T_{i-j}(x) \quad (j = 0, \ldots, n)$.

Dann gilt:

$$s_{n-j} - 2xs_{n-j-1} + s_{n-j-2} = c_j - c_{j+1}x \quad (j = 0, \ldots, n-2)$$

Beweis: Nachrechnen.

Folgerung Sei $n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$, $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Dann kann $s_n = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x)$ über die Rekursion

$$s_k = 2xs_{k-1} - s_{k-2} - c_{n-k+1}x + c_{n-k} \quad (k = 2, \ldots, n)$$
$$s_0 = c_n$$
$$s_1 = c_{n-1} T_0(x) + c_n T_1(x) = c_{n-1} + c_n x$$

berechnet werden.

Bem.: I.allg. gilt *nicht* $s_k = \sum_{i=0}^{k} c_i T_i(x)$.