Jacobi-Verfahren

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Bekanntlich gilt:
$\exists U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthog., $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Diag.matrix $\;:\; U^\top A U = D$

$$\text{Wähle } Q^{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow\ i \\ \\ \leftarrow\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Daher: Bestimme c, s (mit $c^2 + s^2 = 1$, $|c|, |s| \leq 1$) , so dass

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ii}^{neu} & 0 \\ 0 & a_{jj}^{neu} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Verfahren II

Somit

$$\begin{pmatrix} a_{ii}c^2 - 2a_{ij}cs + a_{jj}s^2 & (a_{ii} - a_{jj})cs + a_{ij}(c^2 - s^2) \\ (a_{ii} - a_{jj})cs + a_{ij}(c^2 - s^2) & a_{ii}s^2 + 2a_{ij}cs + a_{jj}c^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{ii}^{neu} & 0 \\ 0 & a_{jj}^{neu} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij}(c^2 - s^2) + (a_{ii} - a_{jj})cs = 0$

Anschaulich ist klar, dass $\varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ gewählt werden kann.

Ansatz: $s = ct$ mit o.E.d.A. $c > 0$

$a_{ij}t^2 + (a_{jj} - a_{ii})t - a_{ij} = 0$

Da nur der Fall $a_{ij} \neq 0$ interessant ist, setze $\tau := \dfrac{a_{jj} - a_{ii}}{2a_{ij}}$

$t^2 + 2\tau t - 1 = 0$

Diskrimante $4\tau^2 + 4 > 0$, Lösungen t_1,t_2 erfüllen $t_1 t_2 = -1$.

Also gibt es eine Lösung mit $t \in (-1, 1]$.

$\{t_1, t_2\} = \{-\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}\} = \{-\operatorname{sign}\tau(|\tau| \pm \sqrt{\tau^2 + 1})\}$.

Daher: $t = -\operatorname{sign}\tau(|\tau| - \sqrt{\tau^2 + 1}) = \operatorname{sign}\tau \dfrac{1}{\sqrt{\tau^2 + 1} + |\tau|}$

Jacobi-Verfahren III

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|a_{ij}^{neu}|^2 = \mathrm{spur}({A^{neu}}^\top A^{neu}) = \mathrm{spur}(Q^\top {A^{alt}}^\top A^{alt} Q) =$$

$$\mathrm{spur}(QQ^\top {A^{alt}}^\top A^{alt}) = \mathrm{spur}({A^{alt}}^\top A^{alt}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|a_{ij}^{alt}|^2$$

Entsprechend auf die 2×2-Matrix aus den Elementen $a_{jj}, a_{ij}, a_{ji}, a_{ii}$ angewandt:

$$|a_{ii}^{neu}|^2 + |a_{jj}^{neu}|^2 = |a_{ii}^{alt}|^2 + |a_{jj}^{alt}|^2 + 2|a_{ij}^{alt}|^2$$

Daher mit $N(A) := \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$ (Summe der Nichtdiagonalelemente)

$$\begin{aligned} N(A^{neu}) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}|a_{kl}^{neu}|^2 - \sum_{k=0}^{n-1}|a_{kk}^{neu}|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}|a_{kl}^{alt}|^2 - \sum_{k=0}^{n-1}|a_{kk}^{neu}|^2 = N(A^{alt}) - 2|a_{ij}^{alt}|^2 \end{aligned}$$

Jacobi-Verfahren IV

Ohne Beweis: Das zyklische Jacobiverfahren (mit der obigen Wahl von t in jedem Transformationsschritt) liefert eine Diagonalmatrix D aus den Eigenwerten von A, das Produkt aller Transformationsmatrizen Q konvergiert gegen eine Orthogonalmatrix U.
Somit $U^\top AU \;=\; D$, woraus mit $u_i := Ue_i \quad Au_i = \lambda_i u_i$ folgt.