SoSe 14 Math.-Sem. "ΨDO" | (Ersatzsprecher: T. Strauss) | "Fourier transf. & distr. in $\mathbb{R}^n$" ① 06/05/14

Zur Erinnerung: Schwartz-Funktion

(I) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{N}_0 : |\varphi|_k < \infty \}$

wo $|\varphi|_k := \sup_{|\alpha+\beta| \le k} |x^\alpha \partial^\beta \varphi|_0$

(II) $= \sup \{ |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n, |\alpha+\beta| \le k \}$

Man kann aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $|\cdot|_k$, $k = 0,1,2,3,\dots$ einen vollständigen metrischen (Vektor) Raum machen (Fréchet-Raum).

Wir werden es nicht tun, aber verwenden, daß "Stetigkeit" von (lineare) Abbildungen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ sich durch Abschätzungen, die die $|\cdot|_k$'s enthalten, ausdrücken lassen.

z.B.: $\partial^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$ $\qquad$ $x^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto x^\alpha \varphi$ (i.e. $x \mapsto x^\alpha \varphi(x)$)

sind stetig.

Allgemeiner:

Def. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\psi \in C^0$.

$\psi \in \mathcal{P}^0 \iff \exists C > 0, N > 0 : |\psi(x)| \le C(1+|x|^2)^N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\psi \in \mathcal{P} \iff \psi \in C^\infty$ und $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{P}^0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ("Fkt. von polynomieller Wachstum in Unendlich")

Lemma 1.4 (i) (Stetigkeit von Diff.)

$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

und $|\partial^\alpha \varphi|_k \le |\varphi|_{k+|\alpha|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

(ii) (Stetigkeit von Mult. mit $\psi \in \mathcal{P}$)

$\forall \psi \in \mathcal{P} \; \exists \{C_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}, \{N_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \psi\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(**) und $|\psi\varphi|_k \le C_k |\varphi|_{k+N_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

Insbesondere: ($\psi(x) = x^\alpha$) $\quad |x^\alpha \varphi|_k \le 2^k (\alpha!) |\varphi|_{k+|\alpha|}$

Bem. $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$

Beweis: (i) Direkt aus Def. von $|\cdot|_k$

(ii) Leibniz' Formel:

$$\partial^\beta(\psi\varphi) = \sum_\gamma \binom{\beta}{\gamma} (\partial^\gamma \psi)(\partial^{\beta-\gamma}\varphi)$$

$\left(\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \right.$ falls $\beta \le \alpha$; ansonst $= 0$ $\left. (\iff \beta_i \le \alpha_i \; i = 1,\dots,n) \right)$

+ Def. von $\mathcal{P}$ & $|\cdot|_k$.

Ƀ ②

Bem:) $T: X \to Y$ linear, X, Y lineare Vektorräume & normierte

$$T \text{ stetig} \iff \exists C > 0 : \|Tx\|_Y \le C \|x\|_X \quad (*)$$

Wenn Metrik/Topology gegeben durch semi-norme, wie in (#)-(##), dann (!) wird (*) ersetzt durch so was wie (*):

$$\exists \{C_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}, \{N_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} : |T\varphi|_k \le C_k |\varphi|_{k+N_k}.$$

Anderes Beispiel

$\boxed{\text{Th. 1.6}}$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1\le p\le\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$, mit $\text{Norm}_{L^p}(\varphi) \le (2\pi)^n |\varphi|_{2n} \quad \forall \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Δ)
& $\forall p \in [1,\infty]$

(i) $\forall p\in[1,\infty], \forall u\in L^p(\mathbb{R}^n), \forall \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$u\bar{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und}$$

$$|(u,\varphi)| \le (2\pi)^n \text{Norm}_{L^p}(u)\, |\varphi|_{2n}$$

(ii) $\forall u$ meßbar, so daß: $u\bar{\varphi}\in L^1 \ \forall \varphi\in\mathcal{S}$:

$$(u,\varphi) = 0 \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies u = 0 \text{ a.e.}$$

(iii) Sei $\varphi \mapsto U(\varphi)$ sesquilineare Form auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mit

$$|U(\varphi)| \le C\|\varphi\|_0 \equiv C\,\text{Norm}_{L^2}(\varphi)$$

Dann existiert eindeutig $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$

so daß $\quad U(\varphi) = (u,\varphi) \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Ausserdem gilt $\quad \|u\|_0 = \text{Norm}_{L^2}(u)$.

Kein Beweis! ((i) Sorgfältige (!) Abschätz), (ii) Argument aus Maßtheorie, (iii) folgt aus Riesz' Darstellungssatz für Hilbert räume) (FA)

Bem: (a) (Δ) sagt, daß die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig ist

(b) Errinnerung: Für ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist das (alg.) Dual das Vektorraum aus alle lineare Funktionale:
$$u: V\to\mathbb{C}, \text{ linear}$$
Fals V auch metrische/topologische/normierter Raum, interessieren uns die stetige lineare Funktionale; V'

(i) Sagt: $\forall u\in L^p(\mathbb{R}^n)$: Die Abb. definiert durch

$$\varphi \mapsto (u,\varphi) = \int \overline{u(x)}\,\varphi(x)\,dx$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$$

ist linear und stetig – i.e. $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$\forall p\in[1,\infty]$

Genauer ist der Dual von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(genannt "temperierte Distribution") definiert durch

(Bemerkung zur "(u,φ)" (!)).

$\boxed{\text{Def}}$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto (u,\varphi) = u(\varphi) \ \Big|\ u \text{ ist semi/sequi linear, und } \exists C>0,\ N\in\mathbb{Z}_+ : |u(\varphi)| = |(u,\varphi)| \le C|\varphi|_N \ \forall \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Big\}$$

Zur Erinnerung: Th. 1.6 sagt, daß $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ "$\subset$" $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall p\in[1,\infty]$

Th 1.6 (ii) sagt, daß die Einbettung $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ injektiv ist.

Wir werden alle mögliche "Operationen", die wir auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren (und die darauf stetig sind) durch "Dualität" auf das Dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ erweiteren – z.B. Fouriertransform:

$\boxed{\text{Zur Erinnerung}}$ Für $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist Fourier-transform

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,dx$$

(Beispiel: $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$; $\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} e^{-|\xi|^2/2}$)

$\boxed{\text{Notation}}$: $D_j = -i\partial_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$

$\boxed{\text{Def}}$ $\check{\ } : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ("Hatschek, Caron.")

$$\varphi \mapsto \check{\varphi} \quad \text{mit} \quad \check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$$

(Offentsichtlich: $|\check{\varphi}|_k = |\varphi|_k$ $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, so $\check{\ } : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig)

$\boxed{\text{Thm. 1.8}}$ $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und

(Stetigkeit von Fourier Transf. auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

$$|\hat{\varphi}|_k \le (8\pi)^n (k+1)!\, |\varphi|_{2n+k}$$

(i.e. $\hat{\ } : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist stetig).

Ausserdem:

(i) $\forall \alpha\in\mathbb{Z}_+^n$:

$$\widehat{(D_x^\alpha\varphi)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\widehat{(x^\alpha\varphi)}(\xi) = \left[(-D_\xi)^\alpha\hat{\varphi}\right](\xi)$$

(ii) $\forall u\in L^1(\mathbb{R}^n)$: $(\hat{u},\varphi) = (\check{u},\hat{\varphi})$

(beide Seiten Integrale über $\mathbb{R}^n$; $\check{u}(x) := u(-x)$ auch für $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$)

(iii) (Inversions Formel) $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n \check{\varphi} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

i.e. $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$.

(iv) (Parseval's Formel) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (2\pi)^n (\varphi, \psi)$$

Beweise: Letztes mal (!) – Zur Erinnerung: (bis jetzt!)

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \bar{v}(x)\, dx$$

(sobald u, v messbar, $u\bar{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, z.B. $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

Bem: Beweis (iii) am schwierigsten: Verwendet "Regularising" durch Gauß-Fkt $e^{-|\xi|^2/2}$ und dann Lebesgue Dom.-Konv.

Wie schon gesagt: Wir werden "Operationen", die wir auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ als stetig bewiesen haben, auf/zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ erweitern: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$\psi\varphi$ ($\psi \in \mathcal{P}$), $\partial^\alpha \varphi$, $\check{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ und $\tau_y \varphi$

(wobei $(\tau_y \varphi)(x) := \varphi(x+y)$: Translation)

Motivation: Falls $u, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, "ist" $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

und "$u(\varphi)$" $(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx$

und (nachrechnen!)

$(\psi u, \varphi) = (u, \bar{\psi}\varphi)$ (trivial)

$(\check{u}, \varphi) = (u, \check{\varphi})$ (trivial)

$(\hat{u}, \varphi) = (\check{u}, \hat{\varphi}) = (u, \check{\hat{\varphi}})$ (aus Inversion & Parseval)

SOLUTION TO PROBLEM 5 (CONTINUATION):

$(D^\alpha u, \varphi) = (u, D^\alpha \varphi)$

(Partielle Integration; Randterme $= 0$: Verwende Abschneiden, Leb. Dom. & $u, \varphi \in \mathcal{S}$)

5

$(\tau_y u, \varphi) = (u, \tau_{-y}\varphi)$.

Filosophie: Die Ausdrücke rechts sind alle von Form

(II) $(u, T\varphi)$, mit $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto T\varphi$

linear & stetig.

$(T\varphi = \psi\varphi, \check{\varphi}, \hat{\check{\varphi}}, D^\alpha\varphi, \tau_{-y}\varphi)$

und machen damit auch Sinn wenn $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

(statt nur $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$\boxed{\text{Thm. 1.9}}$ Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dann wird durch

$$(\check{u}, \varphi) := (u, \check{\varphi})$$

$$(\hat{u}, \varphi) := (\check{u}, \hat{\varphi}) \quad (= (u, \hat{\check{\varphi}})) \qquad , \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

temp. Distribution $\check{u}$ und $\hat{u}$ definiert: $\check{u}, \hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Es gilt $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ (Inversionsformel).

und $(\hat{u}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^n (u, \varphi)$ für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ausserdem gilt: $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$

$\Rightarrow \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

und $(\hat{u}, \hat{v}) = (2\pi)^n (u, v)$ für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(beide Seiten jetzt Integrale)

+ bis hier (erst erwähnt)

Beweis: Daß $\check{u}, \hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ folgt aus (II) und die Tatsache, daß $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ in allen Fälle stetig ist

Für die L^2-Aussage muss man Th. 1.6 (iii) verwenden

Bem: $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, also ist $\hat{u}$ def. für $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$! Aber $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Die Inversionsformel folgt so:

Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann setze $\psi(\xi) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(-\xi)$

Dann ist $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und (wegen Inv. Formel auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Th 18 (iii)).

$$\hat{\psi} = \varphi .$$

Damit:

$$(\hat{\hat{u}}, \varphi) = (\hat{\hat{u}}, \hat{\psi}) \qquad (\hat{\psi} = \varphi)$$

$$= (\check{\hat{u}}, \hat{\hat{\psi}}) \qquad (\text{def } \hat{v} \text{ für } v \overset{=\hat{u}}{\in} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

$$= (\hat{u}, (2\pi)^n \psi) \qquad (\text{Inv. Formel in } \mathcal{S} + \text{Def } \check{v})$$

$$= (2\pi)^n (\check{u}, \hat{\varphi}) \qquad (\text{def } \hat{u})$$

$$= (2\pi)^n (\check{u}, \varphi)$$

i.e. $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ ☒

Prop. Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, dann wird durch

$$\bar{u}(\varphi) = (\bar{u}, \varphi) := \overline{(u, \bar{\varphi})}$$

$$\psi u(\varphi) = (\psi u, \varphi) := (u, \psi\varphi)$$

$$D^\alpha u(\varphi) = (D^\alpha u, \varphi) := (u, D^\alpha \varphi)$$

$$(\tau_y u)(\varphi) = (\tau_y u, \varphi) := (u, \tau_y \varphi)$$

temp. Distr. $\bar{u}$, ψu, $D^\alpha u$, $\tau_y u$, $\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Falls $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stimmen diese Definition mit der früher Def von diese überein.

Man hat Formeln wie

$$\bar{\bar{u}} = u = \check{\check{u}}, \qquad \check{\bar{u}} = \bar{\check{u}}$$

$$\tau_y \tau_z u = \tau_{y+z} u \quad \text{etc.}$$

– lassen sich direkt aus der Def. & , daß die für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gelten, beweisen.

Man hat auch:

Prop. 1.11 Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $y, \eta \in \mathbb{R}^n$:

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \psi)(D^{\alpha-\beta} u)$$

$$\widehat{D_x^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}, \quad \widehat{x^\alpha u} = (-D_\xi)^\alpha \hat{u}$$

$$\widehat{\tau_y u} = e^{i\langle y, \xi\rangle} \hat{u}, \quad \widehat{e^{i\langle x, \eta\rangle} u} = \tau_{-\eta} \hat{u}$$

$$\hat{\check{u}} = \bar{\hat{u}} = \check{\hat{u}}$$

Bem: x^α, ξ^α, $e^{i\langle y, \xi\rangle}$, $e^{i\langle x, \eta\rangle}$ sind alle in $\mathcal{P}$
