Math-Seminar "Ell. PDE" | SoSe2012 Vortrag T. d. Sörensen 17/7/2012

"Lösungsmethoden"

(1) Perronsche Methode

Idea: Falls man Dirichlet Pb. auf Bälle "lösen" kann (i.e. beweisen kann, Lösungen $\exists$), dann kann man es auf algemeiner Gebiete lösen

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Studieren: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

als illustration (Muss ohne Mittelwert eigenschaften sein...).

Dass ganze verwendet als Idee das Maximumsprinzip

$\boxed{\text{Def. 6.1}}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v \in C(\Omega)$. Man nennt v subharmonisch / superharmonisch auf Ω

$:\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq \Omega$, $\forall w \in C(\bar{B})$ s.d. $\Delta w = 0$ gilt

$$v \leq (\geq)\ w \quad \text{auf } \partial B$$
$$\Downarrow$$
$$v \leq (\geq)\ w \quad \text{auf } B$$

Bem: Für alg. L kann mann SubLös / superLös durch vergleich mit $Lw = 0$ definieren

---

$\boxed{\text{Lemma 6.2}}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $u, v \in C(\bar{\Omega})$, u subharm, v superharm auf Ω.

$$u \leq v \quad \text{auf } \partial\Omega$$
$$\Rightarrow \quad u \leq v \quad \text{auf } \Omega$$

(eigl.: $u < v$ oder $u - v \equiv \text{const}$ auf Ω)

(2) Perronsche Methode

Wie man, aus vorhandende subharmonische Funktione, grösser subharm. Funktion machen kann:

Lemma 6.3 $v \in C(\bar{\Omega})$, subharm., $B \subseteq \Omega$ Ball, mit $\bar{B} \subset \Omega$. Sei w definiert durch

$$w = \begin{cases} v & \text{auf } \bar{\Omega} \setminus B \\ \text{Lösung } \left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \\ w|_{\partial B} = v \end{array} \right\} & \text{auf } B \end{cases}$$

Dann ist w subharm. in Ω und $v \leq w$ auf $\bar{\Omega}$

Bem. Als wir $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } B \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B \end{cases}$ für jedes Ball B lösen kann, ist w wohldefiniert (Chap. I)

Man nennt w "harmonic lifting of v (in B)" - oder "Perron-Modifikation von v auf B"

Sei die Perron-Funktion zu φ und Ω def. durch

$$u_\varphi(x) := \sup \left\{ v(x) \mid v \in C(\bar{\Omega}),\ v \text{ subharm. auf } \Omega,\ v \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \right\}$$

Bem: φ ist auf $\partial\Omega$ beschränkt, und konstante Funktionen sind subharm.

Lemma 6.4 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, u_φ wie oben. Dann ist $\Delta u_\varphi = 0$ auf Ω.

③ Perronsche Methode

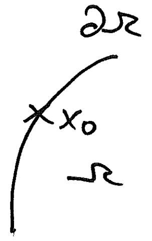
Pb / Frage: Und am Rand? (i.e. $u_\varphi|_{\partial\Omega} \overset{?}{=} \varphi$)

Lemma 6.5 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, u_φ wie oben.

Sei $x_0 \in \partial\Omega$, und sei $w_{x_0} \in C(\bar\Omega)$ subharm auf Ω

mit

$$(*) \begin{cases} w_{x_0}(x_0) = 0 \\ w_{x_0}(x) < 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

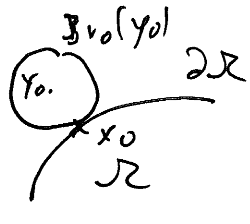


Dann gilt
$$\lim_{x \to x_0} u_\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

Eine Funktion so dass (*) gilt heisst "Barrier-Funktion". Die Existenz solcher Funktionen hängt vom $\partial\Omega$ ab:

Falls Ω erfüllt die "äussere Ball-Bedingung" am $x_0 \in \partial\Omega$, sprich

$$\exists B_{r_0}(y_0): \quad \Omega \cap B_{r_0}(y_0) = \emptyset$$
$$\bar\Omega \cap \overline{B_{r_0}(y_0)} = \{x_0\}$$



Dann existiert eine Barrier-Funktion am x_0

Die "äussere Ball-Bedingung" ist in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ erfüllt falls $\partial\Omega$ is C^2 (und dann ist "$u_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi$").

Globale Schauder-Abschätzungen

$$(*)\quad \begin{cases} a_{ij} D_{ij} u + b_i D_i u + c u = f & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

Thm 5.26 Sei $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt & $C^{2,\alpha}$

$a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.

$\exists\, C = C(n, \alpha, \lambda, \Omega, |a_{ij}|_{C^\alpha(\bar\Omega)}, |b_i|_{C^\alpha(\bar\Omega)}, |c|_{C^\alpha(\bar\Omega)}) > 0$:

Für alle Lösungen $u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ zur $(*)$ ist α

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)} \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)} \right\}$$

① $\boxed{\text{Kontinuitätsmethode}}$

Idee: Das Dirichlet-Pb. auf $C^{2,\alpha}$-Gebiete zu lösen für gleichmässig elliptische Gleichungen angenommen das Problem für $-\Delta$ sich lösen lässt. (Kann auch auf einige nicht-lin. ell. Gleic. verwendet werden).

Ingrediens: A priori-Abschätzungen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar\Omega)$ $(\alpha \in (0,1))$

$$Lu := a_{ij} D_{ij} u + b_i D_i u + cu \quad \text{auf } \Omega$$

$u \in C^2(\Omega)$; $a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$

$\lambda > 0$

$\boxed{\text{Th. 6.11}}$ Sei Ω $C^{2,\alpha}$-Gebiet, L wie oben mit $c \leq 0$

sei $f \in C^\alpha(\bar\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$, dann $\exists!\, u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$

so dass
$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Genauer:

$\boxed{\text{Th 6.12}}$ Ω, L wie in 6.11.

Falls
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für jedes $f \in C^\alpha(\bar\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ hat,

dann hat auch
$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

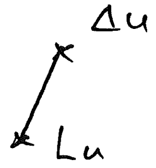
eine (eindeutige) Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$. für solche f und φ.

(2) $\boxed{\text{Kontinuitätsmethode}}$

Pf: Nehm an, $\varphi = 0$ (Ausonsten, studiere

$$\begin{cases} Lv = f - L\varphi & \text{auf } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}).$$

Idea: Für $t \in [0,1]$, sei



$$L_t u := t Lu + (1-t)\Delta u$$

$$L_0 = \Delta, \quad L_1 = L$$

und studiere $\boxed{L_t u = f}$

$$L_t u = a_{ij}^t D_{ij} u + b_i^t D_i u + c^t u$$

$$a_{ij}^t \xi_i \xi_j \geq \min(1,\lambda)|\xi|^2$$

$$|a_{ij}^t|_{C^\alpha(\bar\Omega)},\ |b_i^t|_{C^\alpha(\bar\Omega)},\ |c^t|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \leq \max(1,\Lambda)$$

$\forall t \in [0,1]$.

Es folgt: $|L_t u|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \leq C |u|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}$

$$C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega).$$

sei $X := \{ u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}$

Dann ist $(X, |\cdot|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)})$ Banach.

und $L_t : X \to C^\alpha(\Omega)$ ist beschränkte

Operator.

③ $\boxed{\text{Kontinuitätsmethode}}$

Sei $\quad I = \left\{ s \in [0,1] \;\middle|\; \left\{\begin{array}{ll} L_s u = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{hat Lösung} \\ u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega) \end{array} \;\; \forall f \in C^\alpha(\bar\Omega) \right\}$

Sei $s \in I$, $u := L_s^{-1} f$ die Lösung.

$\boxed{!!}$ Aus globale (auf $\bar\Omega$) Apriori $C^{2,\alpha}$-Abschätzung

(" Wenn u $\left\{\begin{array}{l} L_s u = f \\ u = 0 \end{array}\right.$ löse, dann $|u|_{C^{2,\alpha}} \le \dots$ ")

& Max. prinzip folgt:

$$|L_s^{-1} f|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)} \le C |f|_{C^\alpha(\bar\Omega)}$$

Sei $t \in [0,1]$, $f \in C^\alpha(\bar\Omega)$, schreibe $L_t u = f$ als

$$L_s u = f + (L_s - L_t) u = f + (t-s)(\Delta u \mp L u)$$

I.e.

$(*)\left\{ \left\{\begin{array}{ll} L_t u = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right\} \iff u = L_s^{-1}\left(f + (t-s)(\Delta u - L u)\right) \right.$

Für $u \in X$, setze

$$T u = L_s^{-1}\left(f + (t-s)(\Delta u - L u)\right)$$

Dann $\quad T : X \to X \quad$ und

$$|Tu - Tv|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)} \overset{(!!)}{\le} C |t-s| \, |u-v|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega)}$$

I.e. T ist Kontraktion wenn $|t-s| < \delta = \frac{1}{C}$

Also, $\forall t \in [0,1]$, $|t-s| < \delta$ $\exists u \in X$: $u = Tu$

i.e. (siehe $(*)$) $\forall t \in [0,1]$, $|t-s| < \delta$, $\forall f \in C^\alpha(\bar\Omega)$,

$\exists u \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ Lösung zu $(*)$.

(4) $\boxed{\text{Kontinuitätsmetode}}$

Jetzt, teile $[0, 1]$ in Intervalle von Länge $< \delta$.

Als (!) $0 \in I$ (~~[illegible]~~ pr. Annahme!)

gilt $1 \in I$ $\blacksquare$

---

① $\boxed{\text{Hilbertraum - methoden}}$ (via Lax-Milgram)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$

$$\lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

$$Lu = -D_j(a_{ij} D_i u) + b_i D_i u + cu$$

$u \in H^1_{loc}(\Omega)$ schwache Lösung $Lu = f$ auf Ω

$\Leftrightarrow$ $$\int_\Omega (a_{ij} D_i u D_j \varphi + b_i D_i u \varphi + cu\varphi)\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx$$

$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$

---

sei $$a(u,v) = \int_\Omega (a_{ij} D_i u\, D_j v + b_i D_i u v + cuv)\, dv$$

$u, v \in H^1_0(\Omega)$

$a : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{C}$, bilinear, zur L associiert

Auf $H^1_0(\Omega)$ scalarproduct:

$$(u,v)_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

$\boxed{\text{Th 6.8}}$ Wenn a koerzive ist, i.e. $\exists c_0 > 0$:

$$a(u,u) \geq c_0 \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

dann hat $Lu = f$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$

Beweis: Abstract: Lax-Milgram. Konkret: Darstellungssatz von Riesz (Hilbertraumtheorie) auf H-raum $H^1_0(\Omega)$

② $\boxed{\text{Hilbertraum-methode}}$

Mann kann, mit mehr Aufwand, auch noch das Dirichlet Pb. $\left(\begin{array}{l} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right)$ für algemeines Klasse von elliptisch Gleichungen auf Divergenz form "lösen".

Man hat auch folgendes:

$\boxed{\text{Thm 6.9}}$ $\exists \mu_0 = \mu_0(a_{ij}, b_i, c)$: $\forall \mu \geq \mu_0$

$\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$: $(L + \mu) u = f$

$(u = \cancel{\ } u[\mu])$.

(Einfach weil $a_\mu(u,v) := a(u,v) + \mu(u,v)_{L^2(\Omega)}$, für genügend grosses μ, koercive ist).

---

(1) Variationsrechnung: "Direkte Methode"

Idea: Man minimiert ein Funktional $J(u)$.

Wo minimum ist, muss $J'(u)=0$. Dieser Gleichung (E-L) ist dann $Lu=f$.

Ω, a_{ij}, c, f wie unter "H-raum Methode";

Th. 6.1 Sei $$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a_{ij} D_i u D_j u + cu^2\right) dx + \int_\Omega uf\, dx$$

$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$; $a_{ij} = a_{ji}$, $c \geq 0$

Dann hat J ein minimum

(i.e. $\exists u_0 \in H_0^1(\Omega)$: $J(u) \geq J(u_0)$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$)

Mann rechnet aus (! ableiten), dass

$$-D_j(a_{ij} D_i u) + cu = f \quad \text{in } \Omega \qquad \text{(schwach!)}$$

$$(u \in H_0^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0)$$

Beweis (ideen!): (1) J ist von unten beschränkt

(via Poincaré: $\int_\Omega u^2 \leq c \int |\nabla u|^2$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$)

(2) Nehme "minimierende Folge": $\{u_k\}_k \subseteq H_0^1(\Omega)$

s.d. $J(u_k) \searrow J_0 := \inf\{J(u) \mid u \in H_0^1(\Omega)\}$.

Dann: $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H_0^1(\Omega)$ beschränkt, und (via Rellich-Kondrashov), $\exists \{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ Teilfolge, $u \in H_0^1(\Omega)$

(2) $\boxed{\text{Variationsrechnung: "Direkte Methode"}}$

so daß $u_{k_m} \rightharpoonup u$, $m \to \infty$ (in $H_0^1(\Omega)$)

(i.e. $\langle u_{k_m}, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \to \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$)

(3) Dann zeigt man: $u \mapsto J(u)$ ist unterhalbstetig

(lower semi-cont.)

i.e. $v_m \rightharpoonup v$ in $H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad J(v) \leq \liminf_{m \to \infty} J(v_m).$$

(4) Es folgt $J(u) = J_0$ ☒
