SoSe 2012 | Math. Sem. "Ellip. PDG" (Han & Lin)

Dieses Seminar handlet um "Ellip. PDG".
Ich werde mal kurz darüber was sagen, was das ist, und ein Übersicht darüber geben, was wir lesen wird. – Dann werden wir die Themen vergeben, und, falls Zeit wird, werde ich was darüber sagen, wie man ein Seminarvortrag hällt (Umfrage!).
– Es gibt schon ein Link auf den Homepage vom Seminar, ich werde unter Umständen noch selber dazu was schreibe.

Das Gebiet von PDG ist riesig und wir werden uns nur mit einen kleinen Teil beschäftigen – und zwar, mit die Elliptisch Gleichungen. – Ich werde nicht erklären warum die so heissen, bloss Beispiele & Def. geben. – Es gibt auch "parabolische Gleichungen" (so, in etwa die Wärmeleitungs Gl.) und "hyperbolische Gleichung" (in etwa die Wellen Gleichung).
Einige Dinge hier sind auch auf den

Gebiet von parabolische Gleichungen anwendbar.

Es handelt sich um partielle Diff.-Gleichungen, d.h. es taucht partielle Ableitungen auf – also, es handelt sich um Funktionen von mehreren Variablen, $u : \mathbb{R}^n \to \underset{\mathbb{C}}{\mathbb{R}}$, oder

$u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

z.B., $n = 2$:

$u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u(x, y)$ (wir schreiben auch sowohl $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$)

Im Zentrum steht der sogenannte "Laplace Operator":

Sei Hess(u) der Hesse-Matrix von u,

$$\mathrm{Hess}(u)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ $(= \mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}(u))$

(wir benötigen zuerst $u \in C^2(\Omega)$).

Die erste Gleichung – Laplace-Gleichung – ist

$$\Delta u = 0$$

(man nennt solche u "Harmonische")

Im ganzen Kapitel 1 geht es um Harmonische Funktione

[Schrib "Kapitel 1" "Harmonic Functions"
\+ untertitel
"Mean Value Properties" (1.2)
① "Fundamental Solutions" (1.3)
② { "Maximum Principles" (1.4+1.5)
\+ "Energy Methods"]

~~Im 1.2~~ In diesem Kapitel wird grundlegende Eigenschafte von Harmonische Funktione bewiesen, die, einerseits, späte benötigt werden, andererseits "Themen" behandlen, die dann später in grössen Algemeinheit studiert werden. Es wird sowohl ~~Problem darste~~ Fragestellungen als Beweismethoden illustriert.

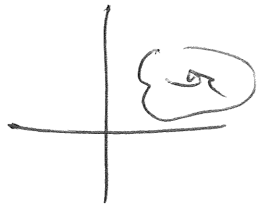
Ich halte, nächstes Mal, den ersten Vortrag, über 1.2., wo diskutiert wird, das $\Delta u = 0$ ~~dass~~ und das u die Mittel-eigenschaft hat ~~das~~ äquivalent ist (i.e. Wert von u am $\underline{x}$ ist Mittel über Kugel mit Zentr x).

In 1.3 wird spezielle Lösungen (!) studiert (Green's Funktionen ..) - und in 1.4 wird das Maximumprinzip ~~[illegible]~~ introduziert

– Dazu kommen wir bald zurück.

Allgemeiner, studiert man (f, φ gegeben).

$$(*) \begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$



– wer DGL's gesehen hat, weiss dass man normalerweise Zusatzbedingungen braucht. Die Gleichung heisst die Poisson GL., aber (*) heisst das Dirichlet Pb.

Von Interesse ist (im Alg. im PDG!!)

(1) Existenz von Lösungen
(2) Eindeutigkeit von Lösungen
(3) "Stetige Abhängigkeit von Daten"
(4) Eigenschaften von Lösungen.

Pkt (1) ist behandelt in Kap. 6 die wir nicht lesen werden! (Aber z.T. verwenden..)

Pkt (2) wird unter oben Genannte "Maximumprinzip" – und auch später, unter gleiche Titel – behandelt.

Pkt (3) heisst: Falls $f, \tilde{f}$ nahe sind, und $u, \tilde{u}$ (*) lösen (mit $f, \tilde{f}$) – sind dann u und $\tilde{u}$ nahe?

Dieses kommt auch vor (in Kapitel 2, insbesondere)
~~zu~~ Pkt. (4) wird uns auch beschäftigen – klingt kryptisch, wird bald erklärt.

~~[illegible]~~ Im ganzen Kapitel 2 handelt es sich um "Maximumsprinzipien"

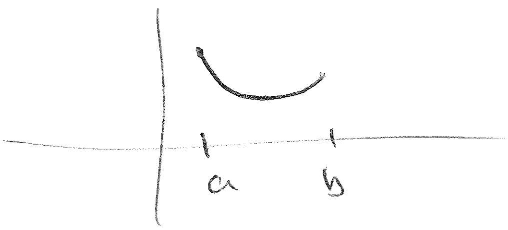
[Schreib "Kapitel 2 "Maximum Principles"

③ "Strong Maximum Principle" (2.2)

④ "A priori und Gradient estimates" (2.3+2.4)

⑤ "Alexandroff Maximum Principle" (2.5)]

Ein "Maximumsprinzip" ist – sehr grob gesagt! – eine veralgemeinerung vom folgenden 1d-Resultat:



Wenn $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt $u'' > 0$ auf (a,b), dann muss das Maximum am Rand (a und/oder b) angenommen werden.

Dies wird für Eindeutigkeit von Lösungen verwendet (unter anderem!).

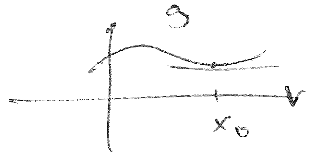
Im ~~Punkt~~ Pkt ④ geht es darum die grösse von u durch die grössen von f und φ (in ⊛) abzuschätzen – "A priori" heisst "bevor" – bevor man weiss, ob es Lösungen gibt ("wenn u Lösung, dann...")

Obwohl wir nicht wirklich Existenz von Lösungen studieren werden, müssen wir kurz darüber reden, um zu verstehen woher solche Gleichungen kommen und wie die algemeine Form ausschaut.

Daher fangen wir bei der Variationsrechnung an.

Sei $$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx$$

Wie bei Funktionen:



wenn g am x_0 Minimum hat, dann $g'(x_0) = 0$

- hat man auch, mehr oder weniger (!) dass wenn I am u. minimum hat, dann ist $I'(u) = 0$

Dies entspricht (!) $\Delta u = f$ auf Ω

Man studiert (oft) I auf Funktionen die dann am Rand $\partial\Omega$ gleich Null sind - d.h.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bei algemeinen Ausdrücke für I kommt mann auf die algemeinen Gleichungen, die im Buch vorkommen

(die Elliptisch sind, grob gesagt, die wo man für I ein Minimum hat...).

Aber - um zu Beweise dass I ein Minimum hat, braucht man den Begriff von Ableitung zu erweitern.
Lass mir mit eine Analogie vergleichen:
Sei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein reelles Polynom.
Einen (!) Grund (!!) $\mathbb{C}$ einzuführen - also, algemeinen Zahlen als $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) ist, das man, mit mehr Zahlen zur Verfügung, leichte eine Lösung zur $p_n(x)=0$ "finden" kann (hat immer in $\mathbb{C}$ Lösung). - Nachher, kann man vielleicht - für ~~B~~ bestimmte p_n's, mit bestimmte Eigenschaften zeigen, das die (oder einige..) Lösunge reel sind.

Ähnlich erweitert mam die Ableitung - oben, ∇u - so dass man "schwache Ableitungen" anschaue (und nicht mehr $u \in C^1$ hat). Man studiert

$I(u)$ auf $H_0^1(\Omega) = \{ u \mid u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0 \}$

(recht ungenau hier!).

Man zeigt (!! Seminar letztes Semester)

dass u ein Minimum [illegible] u hat,

~~[illegible]~~ und dass dies eine art

Elliptische Gleichung erfüllt – aber nur

in diesem neuen "schwachen" Sinne (!!)

D.h. man weiss nur dass $u \in L^2(\Omega)$

(nicht $u \in C^2$ ex.) und das $\nabla u \in L^2(\Omega)$

(was auch immer "∇u" jetzt heisst – es ist definiert so dass v ist die schwach Abl. von u bzgl. x_i falls

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$$\forall \varphi \in \underline{C_0^\infty(\Omega)}$$

(sehe, dass ist das richtige wenn $u \in C^1$ und $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ existiert, mit Partielle integration)

Also, muss man nachher Beweisen, dass u "besser" ist – zuerst, $u \in L^\infty(\Omega)$

(erinnern: $L^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$

auch wenn $|\Omega| < \infty$, $p \geq q \geq 2$

– dann u stetig, dann u Hölder-stetig dann, ∇u Hölder-stetig (so ∇u richtige Ableitung), dann $u \in C^2$ – so dass u die Gleichung im "klassischen Sinn" erfüllt – vielleicht sogar $u \in C^\infty$

Wie weit man es bringen kann, hängt (in ⊛) von f & φ ab:

$u'' = f \in C^0 \Rightarrow$ sofort (!) $u \in C^2$

– (in höheren Dim. komplizierter)

– Also – wie weit man es treiben kann, hängt von Regularität von f & φ ab.

Darum geht es im Kapitel 3

[Schreib "Kapitel 3" "Weak Solutions: Part I"

⑥ "Growth of local integrals" (3.2)

⑦ "Hölder cont. of sol.'s" (3.3),

⑧ "Hölder cont of Gradients (3.4)

und im "Kapitel 4" "Weak Solutions: Part II"

⑨ "Local Boundedness" (4.2)

⑩ "Hölder continuity" (4.3)

(dies ist die Methode von ~~De~~ De Giorgi)]

(Rem. Im Pkt 6 geht es, ganz wichtig, darum an integrale von u zu erkennen, wann u Hölder stetig ist.)

Die wenigen Dinge die man über schwache ~~Lösen~~ Ableitungen / Lösungen zu wissen brauchen – wie um $H^1_0(\Omega)$, wie einige andere Resultate – findet man in Kapitel 1.4 in Dacorogna "Intro to Calc. of Var".
