Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 9

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. V und W seien Vektorräume mit Basen $v_1, \dots, v_n$ bzw. $w_1, \dots, w_m$. Definiere für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ die lineare Abbildung

$$f_{ij} : V \to W$$

durch die Bedingung

$$f_{ij}(v_k) = \delta_{ik} w_j$$

für alle $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, daß die Abbildungen f_{ij} eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W bilden. Leiten Sie daraus die Formel

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \dim W$$

her. (Hinweis: Die Vektorraumstruktur von $\mathrm{Hom}(V, W)$ wurde in Bemerkung (9.2) 6° erklärt. Man beachte, daß f_{ij} durch die obige Bedingung eindeutig festgelegt ist, weil es nach Bemerkung (9.2) 5° genügt, eine lineare Abbildung auf einer Basis anzugeben.) (6)

2. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Sei $r := \mathrm{rg}(f)$. Zeigen Sie, daß es Basen $v_1, \dots, v_n$ von V bzw. $w_1, \dots, w_m$ von W gibt, so daß für $j = 1, \dots, r$ gilt:

$$f(v_j) = w_j$$

und für $j = r + 1, \dots, n$ gilt:

$$f(v_j) = 0$$

(Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis der Dimensionsformel in Satz (9.7) vor.) (6)

3. Seien $f : V \to W$ und $g : W \to U$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, daß der Rang der Komposition $g \circ f$ weder größer als der Rang von f noch größer als der Rang von g werden kann. (4)

4. Wir betrachten den Vektorraum V der reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens n. Die aus der Schule bekannte Ableitung von Polynomen führt diesen Raum in sich über und definiert daher eine lineare Abbildung $f : V \to V$.

   (a) Zeigen Sie: $\dim V = n + 1$

   (b) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$.

   (c) Erklären Sie, warum auch in diesem Fall die Dimensionsformel

   $$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim V$$

   gilt.

   (Hinweis: Eine reelle Polynomfunktion vom Grad höchstens n ist eine Abbildung der Form

   $$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

   mit gewissen reellen Zahlen $a_0, \ldots, a_n$. Verwenden Sie ohne Beweis, daß V ein Unterraum des in Beispiel (5.2) 3° eingeführten Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist.) (4)

Abgabe: Freitag, 21.1.2000, 9.10 Uhr.