Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 8

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen. $v_1, \dots, v_n$ sei eine Basis von V.

   (a) Zeigen Sie, daß f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

   (b) Zeigen Sie, daß f genau dann surjektiv ist, wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist. (6)

2. Seien V und W zwei Vektorräume und $v_1, \dots, v_n$ Vektoren aus V, $w_1, \dots, w_n$ Vektoren aus W.

   (a) Zeigen Sie: Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, so gibt es mindestens eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_j) = w_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.

   (b) Zeigen Sie: Erzeugen $v_1, \dots, v_n$ den Vektorraum V, so gibt es höchstens eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_j) = w_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. (4)

3. (a) Konstruieren Sie einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f: V \to V$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

   (b) Konstruieren Sie einen Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f: V \to V$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

   (Hinweis: Für endlichdimensionale Vektorräume ist das nicht möglich. (Warum?) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ aller Folgen reeller Zahlen, die nur endlich viele von Null verschiedene Glieder besitzen, also den Vektorraum der reellen Polynome. Denken Sie an Verschiebungen der Folgenglieder nach rechts oder links.) (6)

4. Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x/3 + 2y/3, x/3 + 2y/3)$$

(a) Zeigen Sie, daß f linear ist.

(b) Zeigen Sie, daß $f \circ f = f$ ist.

(c) Bestimmen Sie Kern und Bild von f. Zeichnen Sie $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ in ein Koordinatenkreuz ein. Beschreiben Sie anhand dieses Bildes die Abbildung f. (4)

Abgabe: Freitag, 14.1.2000, 9.10 Uhr.