Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 7

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ die Menge

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ und } x_2 + x_3 = 0\}$$

   Begründen Sie, daß U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie seine Dimension, indem Sie eine Basis von U angeben.

   (Hinweis: Der Nachweis, daß U ein Untervektorraum ist, ist mit den Hilfsmitteln aus der Vorlesung recht kurz.) (3)

2. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen, die nicht alle Null sind. Zeigen Sie, daß

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

   ein $n-1$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{Q}^n$ ist. (5)

3. Sei V ein Vektorraum und U und W zwei Untervektorräume von V, so daß sich jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe

$$v = u + w$$

   mit $u \in U$ und $w \in W$ darstellen läßt. Sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U und $w_1, \ldots, w_k$ eine Basis von W. Zeigen Sie, daß

$$u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_k$$

   eine Basis von V ist. (7)

4. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden zu einem Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, indem man reelle Zahlen wie gewöhnlich addiert und wie ge-

wöhnlich reelle Zahlen mit rationalen multipliziert. Zeigen Sie, daß dieser Vektorraum unendlichdimensional ist.

(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, $\mathbb{R}$ aber nicht. Schlagen Sie diesen Sachverhalt ggf. in einem Lehrbuch nach.) (5)

Abgabe: Freitag, 7.1.2000, 9.10 Uhr.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr.