**Mathematisches Institut**
**der Universität München**
**Prof. Dr. M. Schottenloher**

**WS 1999/2000**
**Blatt 6**

# MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Zeigen Sie: Ein Vektorraum kann nicht Vereinigung von zwei echten Unterräumen sein. (3)

2. Zeigen Sie: Enthält der Grundkörper unendlich viele Elemente, so kann ein Vektorraum über diesem Körper nicht Vereinigung von endlich vielen echten Unterräumen sein.

   (Hinweis: Man schließe durch Widerspruch: Ist $V$ doch Vereinigung von endlichen vielen Unterräumen $U_1, \ldots, U_n$, so kann man $n$ so klein wie möglich wählen. In dieser Situation gibt es $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, die jeweils in keinem anderen Unterraum liegen. (Warum?) Für $n+1$ verschiedene Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K$ betrachte man die Vektoren $u_1 + \lambda_1 u_2, \ldots, u_1 + \lambda_{n+1} u_2$, von denen zwei in demselben Unterraum liegen müssen.) (7)

3. Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren in dem Vektorraum $V$ über dem Körper $K$ mit der Eigenschaft, daß je $n-1$ von diesen Vektoren linear unabhängig sind. Seien

   $$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

   und

   $$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$$

   zwei Linearkombinationen, bei denen jeweils nicht alle Koeffizienten Null sind. Zeigen Sie, daß es eine Zahl $\lambda \in K$ mit der Eigenschaft

   $$\mu_j = \lambda \lambda_j$$

   für alle $j = 1, \ldots, n$ gibt. (5)

4. Sei $V$ ein Vektorraum. Zeigen Sie das sogenannte Austauschlemma: Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $V$ und ist $v \in V$ ein von Null verschiedener Vektor, so gibt es einen Vektor $v_i$, den man gegen $v$ austauschen kann, d. h.

$$v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n$$

ist wieder eine Basis von $V$. (5)

Abgabe: Freitag, 17.12.99, 9.10 Uhr.