Mathematisches Institut **WS 1999/2000**
der Universität München **Blatt 4**
Prof. Dr. M. Schottenloher

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Zeigen Sie, daß jede Gruppe mit drei Elementen isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist. (Hinweis: Zwei Gruppen heißen isomorph, wenn es einen bijektiven Gruppenhomomorphismus von der einen Gruppe in die andere Gruppe gibt. Machen Sie sich zunächst eine Tabelle, wie die drei Elemente $3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}$ und $2+3\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}_3$ verknüpft werden. Überlegen Sie sich dann, welche Möglichkeiten es bei einer beliebigen dreielementigen Gruppe für eine solche Tabelle überhaupt gibt. Erklären Sie, was die Form dieser Tabellen mit bijektiven Gruppenhomomorphismen zu tun haben.) (5)

2. Sei n eine natürliche Zahl und

$$\mathbb{Z}_n := \{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, 2+n\mathbb{Z}, \dots, (n-1)+n\mathbb{Z}\}$$

Wir verwenden die Abkürzung $\bar{m} := m + \mathbb{Z}_n$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist $\mathbb{Z}_n$ durch die Verknüpfung

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, (\bar{i}, \bar{j}) \mapsto \overline{i+j}$$

eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, daß auch die Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, (\bar{i}, \bar{j}) \mapsto \overline{i \cdot j}$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie, daß die Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist und ein Einselement besitzt. Zeigen Sie, daß für die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ das Distributivgesetz gilt. (5)

3. (a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}_5$ mit den in der vorhergehenden Aufgabe beschriebenen Verknüpfungen ein Körper ist.

   (b) Zeigen Sie: Ist n keine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}_n$ kein Körper.

(Hinweis: Die Frage ist also in beiden Fällen, ob ein von Null verschiedenes Element ein multiplikatives Inverses besitzt. Gehen Sie wie folgt an die zweite Teilaufgabe heran: Schreiben Sie n in der Form $n = pq$ für von Eins verschiedene Zahlen p und q. Versuchen Sie, in $\mathbb{Z}_n$ Elemente zu finden, die von Null verschieden sind, deren Produkt aber Null ist. Überlegen Sie sich, warum eine solche Situation in einem Körper nicht eintreten kann.) (5)

4. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den von $\mathbb{R}$ induzierten Verknüpfungen ein Körper ist.

(Hinweis: Fassen Sie sich relativ kurz bei der Behandlung von Rechenregeln wie dem Assoziativgesetz, die für $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gelten, weil sie für alle reellen Zahlen gelten. Wichtiger ist etwa, daß das Produkt zweier Elemente aus $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ wieder in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ liegt. Besonders schwierig ist die Behandlung des inversen Elementes der Multiplikation. Hier muß man den auftretenden Bruch mit Hilfe der dritten binomischen Formel trickreich erweitern und dabei sicherstellen, daß der auftretende Nenner nicht Null ist. Das wiederum folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von ganzen Zahlen.) (5)

Abgabe: Freitag, 3.12.99, 9.10 Uhr.