Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 3

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Seien G und H zwei Gruppen. Wie in der Vorlesung definiert wurde, heißt eine Abbildung $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, falls für alle $g, g' \in G$ gilt:
$$f(gg') = f(g)f(g')$$
Zeigen Sie, daß dann auch gilt:
   (a) $f(e) = e$
   (b) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für alle $g \in G$.

   (Hinweis: Im ersten Teil bezeichnet das erste e das neutrale Element von G, das zweite e das neutrale Element von H. Die beiden neutralen Elemente werden also gleich bezeichnet, obwohl sie meistens verschieden sind. g^{-1} bezeichnet das inverse Element von g. Diese Aussagen wurden in der Vorlesung angegeben, aber nicht bewiesen.) (4)

2. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:
   (a) $\{g \in G \mid f(g) = e\}$ ist eine Untergruppe von G.
   (b) $\{h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h\}$ ist eine Untergruppe von H.

   (Hinweis: Die erste Untergruppe wird der Kern von f, die zweite das Bild von f genannt. Beachten Sie, daß Untergruppen nicht leer sein dürfen. Auch diese Aussagen wurden in der Vorlesung formuliert.) (5)

3. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen an f äquivalent sind:
   (a) $\{g \in G \mid f(g) = e\} = \{e\}$, d. h. der Kern von f besteht nur aus dem neutralen Element.

(b) f ist injektiv, d. h. zwei verschiedene Elemente von G werden durch f auf verschiedene Elemente von H abgebildet.

(5)

4. Sei $\phi \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Wir definieren eine Abbildung

$$D_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\cos(\phi)x + \sin(\phi)y, -\sin(\phi)x + \cos(\phi)y)$$

Zeigen Sie:

(a) D_ϕ ist bijektiv.

(b) $f : \mathbb{R} \to Bij(\mathbb{R}^2), \phi \mapsto D_\phi$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Entscheiden Sie, ob f injektiv ist. (Hinweis: Benutzen Sie die aus der Schule bekannten Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. Beachten Sie, daß eine Rechnung in Aufgabenteil (b) benutzt werden kann, um eine Umkehrabbildung zu D_ϕ zu konstruieren. Überlegen Sie, wie eine solche Umkehrabbildung beim Nachweis der Bijektivität helfen kann. Begründen Sie alle Ihre Behauptungen und Entscheidungen.) (6)

Abgabe: Freitag, 26.11.99, 9.10 Uhr.