Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 14

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Sei A eine $n \times n$-Matrix, deren Einträge reelle Zahlen sind. Wir nehmen an, daß A n verschiedene Eigenwerte besitzt, die alle ganzzahlig sind. Zeigen Sie, daß die Determinante von A eine ganze Zahl ist und daß die Eigenwerte die Determinante teilen.

   (Hinweis: Diese Aussage ist auch dann richtig, wenn die Eigenwerte nicht alle verschieden sind.) (4)

2. Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (Hinweis: Das charakteristische Polynom hat hier offenbar den Grad 3. Obwohl es prinzipiell möglich ist, die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades mit Hilfe der cardanischen Formel zu berechnen, die man zum Beispiel in der "Kleinen Enzyklopädie Mathematik" findet, ist das hier nicht notwendig, weil man die Nullstellen mit Hilfe des Hinweises aus Aufgabe 1 raten kann.) (4)

3. Entscheiden Sie, ob die Matrix A aus der vorhergehenden Aufgabe diagonalisierbar ist. Wenn das der Fall ist, bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren. (6)

4. (a) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix den Betrag 1 haben.

   (b) Sei ϕ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

   orthogonal ist. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

(Hinweis: Orthogonale Matrizen wurden in Aufgabe 3 auf Blatt 13 definiert. Eine Matrix mit reellen Einträgen kann durchaus Eigenwerte haben, die komplex, aber nicht reell sind. Im Anschluß an Def. (19.3) wurden nur reelle Eigenwerte behandelt. Bei der ersten Teilaufgabe ist es nützlich, die Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$ komplex zu konjugieren und zu transponieren. Die in der zweiten Teilaufgabe betrachtete Matrix ist schon in Aufgabe 4 auf Blatt 3 und in der 1. Klausur betrachtet worden.) (6)

Abgabe: Freitag, 25.2.2000, 9.10 Uhr.