Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 12

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{Q}^3$ und $\mathbb{Q}^2$.

   (b) Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   des Vektorraumes $\mathbb{Q}^3$ und der Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   des Vektorraumes $\mathbb{Q}^2$. (Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, daß v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2 tatsächlich Basen des $\mathbb{Q}^3$ bzw. des $\mathbb{Q}^2$ sind.) (4)

2. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. $v_1, \ldots, v_n$ und $v'_1, \ldots, v'_n$ seien zwei Basen von V, $w_1, \ldots, w_m$ und $w'_1, \ldots, w'_m$ seien zwei Basen von W. Sei A die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$, B die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $v'_1, \ldots, v'_n$ und $w'_1, \ldots, w'_m$. Zeigen Sie, daß man die zweite darstellende Matrix aus der ersten berechnen kann, wenn man die Basiswechsel-Matrizen kennt:

$$B = S^{-1} A T$$

Dabei ist S die Matrix des Basiswechsels von der Basis $w_1, \ldots, w_m$ nach $w'_1, \ldots, w'_m$ und T die Matrix des Basiswechsels von $v_1, \ldots, v_n$ nach $v'_1, \ldots, v'_n$. (Hinweis: Die Matrix des Basiswechsels wurde in Paragraph (12.2) definiert. Die obige Formel wird auch als Transformationsformel bezeichnet.) (6)

3. Berechnen Sie in der Situation von Aufgabe 1 die Basiswechsel-Matrizen von den Standardbasen auf v_1, v_2, v_3 bzw. w_1, w_2 und prüfen Sie die Transformationsformel explizit nach. (Hinweis: Dafür müssen Sie eine Basiswechsel-Matrix invertieren.) (4)

4. Sei $M := \{1, \ldots, p\}$.

   (a) Zeigen Sie, daß jede Permutation von M Produkt von Transpositionen ist.

   (b) Zeigen Sie, daß jede Transposition Produkt einer ungeraden Anzahl von Nachbarvertauschungen ist.

   (c) Schließen Sie, daß jede Permutation von M Produkt von Nachbarvertauschungen ist.

   (Hinweis: Diese Aussagen wurden in Lemma (15.7) formuliert. Sie sollen sie hier noch einmal im Detail beweisen.) (6)

Abgabe: Freitag, 11.2.2000, 9.10 Uhr.