Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 11

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. (a) Berechnen Sie die inverse Matrix der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Erklären Sie, warum das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 &= b_2 \\ x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

   für jede rechte Seite b_1, b_2, b_3 genau eine Lösung hat, und geben Sie diese Lösung explizit an.

   (Hinweis: Einen Algorithmus zum Invertieren von Matrizen findet man in dem Buch von Gerd Fischer, Lineare Algebra, Par. 2.7.4, S. 95, 8. Aufl., Vieweg, Braunschweig, 1984.) (4)

2. Betrachten Sie die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Erklären Sie, warum A eine Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ (d. h. 90 Grad) und B eine Drehung um die y-Achse mit Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ beschreibt.

   (b) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß $A \circ B \neq B \circ A$. Erklären Sie diese Tatsache geometrisch, indem Sie einen Würfel in seiner ursprünglichen Lage und in seinen gedrehten Lagen zeichnen. (6)

3. V und W seien Vektorräume mit Basen $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$. In Aufgabe 1 auf Blatt 9 wurde für $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ die lineare Abbildung
$$f_{ij} : V \to W$$
durch die Bedingung
$$f_{ij}(v_k) = \delta_{ik} w_j$$
für alle $k = 1, \ldots, n$ erklärt. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen dieser Abbildungen bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$. (4)

4. Betrachten Sie die allgemeine lineare Gruppe $GL(2, \mathbb{F}_2)$ über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen (vgl. Beispiel (4.5)).

   (a) Geben Sie alle Elemente dieser Gruppe explizit an. Bestimmen Sie die Ordnung dieser Gruppe.

   (b) Betrachten Sie die Menge M, die aus den folgenden drei Vektoren besteht:
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Die Gruppe $GL(2, \mathbb{F}_2)$ führt M in sich über. (Warum?) Geben Sie für jedes Element von $GL(2, \mathbb{F}_2)$ in einer Tabelle an, wie es auf die Vektoren aus M wirkt. (Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ führt zu der Tabelle $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_1 & v_3 \end{pmatrix}$.)

   (c) Erklären Sie, warum die Abbildung, die jeder Matrix aus $GL(2, \mathbb{F}_2)$ die in der jeweiligen Tabelle angegebene Permutation zuordnet, ein Gruppenisomorphismus zwischen $GL(2, \mathbb{F}_2)$ und $Bij(M)$ ist. (6)

Abgabe: Freitag, 4.2.2000, 9.10 Uhr.