Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. M. Schottenloher

WS 1999/2000
Blatt 10

MWB: Lineare Algebra für Wirtschaftsmathematiker

1. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Zeigen Sie:

   (a) Der Spaltenrang von A ist höchstens n und der Zeilenrang von A ist höchstens m.

   (b) Der Spaltenrang von A ist höchstens m und der Zeilenrang von A ist höchstens n. (6)

2. Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times k$-Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Zeigen Sie:

   (a) Der Spaltenraum von AB ist eine Teilmenge des Spaltenraumes von A. Es ist: $\mathrm{SR}(AB) \leq \mathrm{SR}(A)$.

   (b) Der Zeilenraum von AB ist eine Teilmenge des Zeilenraumes von B. Es ist: $\mathrm{ZR}(AB) \leq \mathrm{ZR}(B)$.

   (Hinweis: Per definitionem ist der Spaltenraum einer Matrix der von den Spaltenvektoren aufgespannte Raum, der Zeilenraum der von den Zeilenvektoren aufgespannte Raum. Sehen Sie sich zur Lösung der Aufgabe die Formel für das Matrizenprodukt aus Definition (11.1) an und versuchen Sie, aus dieser Formel abzuleiten, daß die Spaltenvektoren von AB Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A sind.) (6)

3. Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Zeigen Sie:

   (a) Ist $AB = E$, so ist $\mathrm{SR}(A) = m$.

   (b) Ist $AB = E$, so ist $\mathrm{ZR}(B) = m$. (4)

4. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

mit rationalen Einträgen. Bringen Sie diese Matrix durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf eine Form, in der außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen und in der Hauptdiagonalen zuerst Einsen und dann Nullen stehen. (Dabei kann es geschehen, daß ausschließlich Nullen oder ausschließlich Einsen auftreten.) Bestimmen Sie den Rang von A.

(Hinweis: Führen Sie Ihre Schritte genau aus und erklären Sie, welche Operation Sie in welchem Schritt durchführen.) (4)

Abgabe: Freitag, 28.1.2000, 9.10 Uhr.