Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 8

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

29. Seien im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ die Unterräume

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \}$$

$$U_2 = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

gegeben, Geben Sie für jeden der Unterräume $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$ eine Basis an.

30. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie:

    (a) Ist $U_1 \subset U_2$, so gibt es ein Komplement W_1 von U_1 in V und ein Komplement W_2 von U_2 in V mit der Eigenschaft $W_2 \subset W_1$.

    (b) Ist $\dim(U_1) = \dim(U_2)$, so haben U_1 und U_2 ein „gemeinsames“ Komplement in V, d. h. es gibt einen Unterraum W von V mit

$$V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$$

31. (a) Über $K = \mathbb{R}$ seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

(b) Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$. Welche Bedingungen müssen die α_{ij} erfüllen, damit $AB = BA$ für alle $B \in K^{n\times n}$ gilt?

32. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $U = \{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in V \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Zeigen Sie:

(a) U ist ein 2-dimensionaler Unterraum von V mit Basis

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen bildet U einen Körper. Es gilt $I^2 = -E$.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 13.1.2004, 14.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Das griechische Alphabet

alpha	α	A	jota	ι	I	rho	ρ	P
beta	β	B	kappa	κ	K	sigma	σ	Σ
gamma	γ	Γ	lambda	λ	Λ	tau	τ	T
delta	δ	Δ	mü	μ	M	ypsilon	υ	Υ
epsilon	ε	E	nü	ν	N	phi	φ	Φ
zeta	ζ	Z	xi	ξ	Ξ	chi	χ	X
eta	η	H	omikron	o	O	psi	ψ	Ψ
theta	ϑ	Θ	pi	π	Π	omega	ω	Ω

Χαλεπὰ τὰ καλά