Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 6

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

21. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \geq 2)$. Zeigen Sie: Genau dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, wenn

$$v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$$

linear unabhängig sind.

22. Seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben und sei $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Zeigen Sie, daß sich das Erzeugendensystem $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu genau fünf Basen von V verkleinern läßt.

23. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ (die b_i paarweise verschieden) und sei U der von den Vektoren

$$a_1 = 2b_1 - b_2 \quad a_2 = b_2 + b_3 + b_4 \quad a_3 = b_3 - b_4$$

erzeugte Unterraum.

(a) Zeigen Sie, daß $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von U ist.

(b) Ergänzen Sie die Menge A zu einer Basis von V.

24. Sei K ein Körper, M eine nichtleere Menge und $V = \mathrm{Abb}(M, K)$ der K-Vektorraum aller Abbildungen von M nach K. Für jedes $f \in V$ heißt $T(f) := \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ der Träger von f. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $U = \{f \in V \mid T(f) \text{ ist endlich}\}$ ist ein Unterraum von V.

(b) Definiert man für jedes $x \in M$ die Abbildung $e_x : M \to K$ durch

$$e_x(y) = \begin{cases} 1: & \text{falls } y = x \\ 0: & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

so ist $E = \{e_x \mid x \in M\}$ eine Basis von U.

Dieses Blatt wird nicht korrigiert, aber in den Übungsgruppen besprochen. Es soll daher auch nicht abgegeben werden.