Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 5

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

17. Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$ und seien im K-Vektorraum $V = K^3$ die Teilmengen

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \} \qquad U_2 = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

(b) $U_1 + U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

18. (a) Seien X, Y, Z Unterräume eines K-Vektorraumes V und sei $X \subset Z$. Zeigen Sie: $(X+Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$.

(b) Gilt die Gleichheit in (a) auch dann, wenn $X \not\subset Z$ ist?

19. Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind:

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

20. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$: Genau dann sind $\alpha v_1 + \beta v_2$ und $\gamma v_1 + \delta v_2$ linear unabhängig, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 2.12.2003, 14.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.