Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 4

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

13. (a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Teilmengen A, B, C des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^2$, welche der drei Unterraum-Axiome erfüllt sind:

$$A = \emptyset \qquad B = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{Z}\} \qquad C = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_1\alpha_2 \geq 0\}$$

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ die Teilmenge

$$U = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = t\}$$

ein Unterraum?

(Hinweis: Bitte begründen Sie stets, also bei dieser und allen ähnlichen Aufgaben, Ihre Antwort.)

14. Gegeben sei im K-Vektorraum $V = K^2$ die Teilmenge

$$U = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in V \mid \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0\}$$

Untersuchen Sie, ob U ein Unterraum von V ist für

(a) $K = \mathbb{R}$
(b) $K = \mathbb{F}_2$
(c) $K = \mathbb{F}_5$

(Hinweis: Bitte begründen Sie auch hier Ihre Antwort.)

15. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und

$$U_1 := \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$
$$U_2 := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

Zeigen Sie:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

(b) $U_1 + U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

16. Sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie: Ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V, so folgt $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 25.11.2003, 14.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Die erste Klausur findet am Samstag, den 13.12.2003, um 10.15 Uhr statt, und zwar in den folgenden Räumen:

1. Gruppen A und B: E 51
2. Gruppen D und E: 122
3. Gruppen C und F: E 52
4. Gruppen G und H: 138