Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 2

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

5. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x + 4y)$$
bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung g.

6. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und seien A_1, A_2 Teilmengen von M sowie B_1, B_2 Teilmengen von N. Zeigen Sie:
   (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   (b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

7. (a) Sei K ein Körper. Folgern Sie allein aus den Körperaxiomen, daß für alle $\alpha \in K \setminus \{0\}$ das in (M 4) geforderte Element α^* eindeutig durch α bestimmt ist.
   (b) Sei K ein Körper und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ mit $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$. Zeigen Sie:
   $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$$

8. (a) Zeigen Sie, daß jede komplexe Zahl ein Quadrat ist, d. h. zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $w \in \mathbb{C}$ mit $z = w^2$ existiert.
   (b) Bestimmen Sie für die Primzahlen $p = 3, 5, 7$ im Körper $\mathbb{F}_p$ alle Elemente, die ein Quadrat sind.
   (c) Sei K ein endlicher Körper, in dem jedes Element ein Quadrat ist. Zeigen Sie, daß dann $1 + 1 = 0$ in K ist.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 11.11.2003, 14.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Literatur:

1. A. Beutelspacher: Lineare Algebra, Vieweg, 2003
2. E. Brieskorn: Lineare Algebra und analytische Geometrie I, II, Vieweg, 1985
3. P. M. Cohn: Algebra I, Wiley, 1988
4. G. Fischer: Lineare Algebra, Vieweg, 2002
5. K. Jänich: Lineare Algebra, Springer, 2002
6. M. Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer, 1997
7. H.-J. Kowalsky, G. O. Michler: Lineare Algebra, de Gruyter, 1995
8. F. Lorenz: Lineare Algebra I, II, B. I.-Wissenschaftsverlag, 1992