Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

WS 2003/2004
Blatt 12

Übungen zu MIB: Lineare Algebra

45. (a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

$$f_3 : K^{n\times n} \to K^{n\times n}, \ A \mapsto AB - BA$$

wobei K ein Körper und $B \in K^{n\times n}$ eine fest vorgegebene Matrix ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix}$$

linear ist, bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sowie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

46. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist f ein Monomorphismus, wenn $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linear unabhängig sind.

(b) Genau dann ist f ein Epimorphismus, wenn $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ ein Erzeugendensystem von W bilden.

47. Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.

   (a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Fix}(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ ein Unterraum von V ist.

   (b) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   eine Basis von $\mathrm{Fix}(f)$.

48. (a) Sei K ein Körper und $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ der K-Vektorraum aller Folgen in K. Geben Sie zwei Endomorphismen $f, g \in \mathrm{End}(V)$ an, so daß $f \circ g = \mathrm{id}_V$ ist, aber $g \circ f \neq \mathrm{id}_V$.

   (b) Sei R ein Ring mit zwei Elementen x und y, so daß $1 - xy$ invertierbar ist. Zeigen Sie, daß dann auch $1 - yx$ invertierbar ist.

49. (a) Sei V ein K-Vektorraum, $v \in V$, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $n \geq 1$ mit $f^{n+1}(v) = 0$, $f^n(v) \neq 0$. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$v, f(v), f^2(v), \ldots, f^n(v)$$

   linear unabhängig sind.

   (b) Ist eine $n \times n$-Matrix nilpotent, so gilt bereits $A^n = 0$.

50. Sei $\dim(V) = n$, U ein Unterraum von V mit $\{0\} \neq U \subsetneqq V$ und $b_1, \ldots, b_m$ eine Basis von U. Zeigen Sie: Ergänzt man die b_i zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V, so ist

$$b_{m+1} + U, \ldots, b_n + U$$

   eine Basis des Faktorraumes V/U.

Schöne Semesterferien und auf Wiedersehen im Sommersemester!