Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 9

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

33. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

    (a) Ist f trigonalisierbar und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung g trigonalisierbar.

    (b) Ist jeder Unterraum von V f-invariant, so folgt $f = \lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$.

34. (a) Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

    $$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

    diagonalisierbar? Geben Sie in diesen Fällen eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, welche A diagonalisiert.

    (b) Geben Sie für die Matrix

    $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

    eine invertierbare Matrix $Q \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ an, welche B diagonalisiert.

35. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $g \in \mathrm{End}(V)$. Für jeden g-invarianten Unterraum U von V bezeichne g_U den induzierten Endomorphismus $U \to U,\ x \mapsto g(x)$. Zeigen Sie:

    (a) $\mathrm{Kern}(g^n)$ ist der größte g-invariante Unterraum U von V, so daß g_U nilpotent ist.

    (b) $\mathrm{Bild}(g^n)$ ist der größte g-invariante Unterraum U von V, so daß g_U ein Isomorphismus ist.

36. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß für $f \in \mathrm{End}(V)$ äquivalent sind:

(a) f ist idempotent, d. h. es ist $f^2 = f$.

(b) Es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ mit

$$M_{(v_j)}(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Aufgrund von Sparmaßnahmen kann die Korrektur dieses Blattes vom Mathematischen Institut nicht finanziert werden. Es kann daher auch nicht abgegeben werden.