Mathematisches Institut **SS 2004**
der Universität München **Blatt 8**
H. Zöschinger

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

29. (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ und
$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
Zeigen Sie, daß A nur dann einen reellen Eigenwert besitzt, wenn t ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Bestimmen Sie in diesem Fall alle Eigenwerte von A sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.

    (b) Sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und sei $f : V \to V$ der Endomorphismus, der jeder Funktion v ihre Ableitung v' zuordnet. Zeigen Sie, daß jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f ist.

30. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und seien p, q natürliche Zahlen mit $1 \leq p \leq q \leq n$. Geben Sie einen Endomorphismus f von V und einen Eigenwert λ von f an, dessen geometrische Vielfachheit p und dessen algebraische Vielfachheit q ist.

31. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

    (a) A und die Transponierte A^t haben dieselben Eigenwerte.

    (b) A und die Transponierte A^t haben dieselben Eigenvektoren.

    (c) Ist A diagonalisierbar und hat A nur einen Eigenwert $\lambda \in K$, so folgt $A = \lambda E_n$.

32. Bestimmen Sie für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ jeweils eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 22.6.2004, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Auf jeder Lösung müssen sich zwei Namen und die Angabe der Übungsgruppe befinden, in der das Blatt zurückgegeben werden soll.