Mathematisches Institut **SS 2004**
der Universität München **Blatt 7**
H. Zöschinger

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

25. Sei K ein Körper und I eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

    (a) Der K-Vektorraum $R = \text{Abb}(I, K)$ aller Abbildungen von I nach K wird durch
    $$(\alpha_i) \cdot (\beta_i) = (\alpha_i \beta_i)$$
    zu einem kommutativen Ring. (Hinweis: Vgl. Aufgabe 24 von Blatt 6 im Wintersemester 2003/2004.)

    (b) Ist die Menge I unendlich, so hat das Polynom $f = X^2 - X \in R[X]$ unendlich viele Nullstellen in R.

26. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Zeigen Sie:

    (a) Ist $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ und $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i X^i \in K[X]$ das charakteristische Polynom von A, so gilt
    $$\gamma_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_{ii}\alpha_{jj} - \alpha_{ij}\alpha_{ji})$$

    (b) Ist $f = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i X^i \in K[X]$ ein Polynom mit $\gamma_n = 1$ und definiert man
    $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \dots & -\gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$
    so folgt $\chi_B = f$.

27. Zeigen Sie für beliebige Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$, daß AB und BA dasselbe charakteristische Polynom haben. (Hinweis: Man betrachte zuerst den Spezialfall $A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $1 \leq r \leq n$.)

28. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte sowie Basen der dazugehörigen Eigenräume:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Aufgrund von Sparmaßnahmen kann die Korrektur dieses Blattes vom Mathematischen Institut nicht finanziert werden. Es kann daher auch nicht abgegeben werden.