Mathematisches Institut **SS 2004**
der Universität München **Blatt 6**
H. Zöschinger

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

21. Sei $n \geq 2$ und $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ gegeben durch $\alpha_{ij} = 1$ falls $i = j + 1$ oder $i = j - 1$, $\alpha_{ij} = 0$ sonst. Zeigen Sie:

$$\det(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

22. (a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie durch Induktion über $n \geq 2$: Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, so gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

(b) Seien paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n$ gegeben ($n \geq 1$) und zu jedem x_i ein $y_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq n$). Zeigen Sie, daß es genau ein Polynom der Form

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \in \mathbb{R}[X]$$

gibt mit $f(x_i) = y_i$ für alle i.

23. (a) Berechnen Sie in $\mathbb{R}^4$ das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(b) Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $v \in K^n$ das Vektorprodukt von $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K^n$. Zeigen Sie:

$$v \in \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \Leftrightarrow v^t v = 0$$

24. (a) Sei K ein Körper und $f, g \in K[X]$ mit $f(\lambda) = g(\lambda)$ für alle $\lambda \in K$. Zeigen Sie: Ist K unendlich, so folgt $f = g$.

(b) Sei K ein endlicher Körper mit n Elementen und

$$f = X^n - X \in K[X]$$

Geben Sie alle Nullstellen von f in K an sowie ihre algebraischen Vielfachheiten. (Hinweis: Übung 11 in MIB)

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 8.6.2004, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Auf jeder Lösung müssen sich zwei Namen und die Angabe der Übungsgruppe befinden, in der das Blatt zurückgegeben werden soll.