Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 4

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

13. (a) Berechnen Sie

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \quad \text{und} \quad \prod_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)$$

durch Abzählen der geraden und ungeraden Permutationen.

(b) Sei $\sigma \in S_n$ und P_σ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeigen Sie: $(P_\sigma)^{-1} = (P_\sigma)^t$.

14. Sei R ein kommutativer Ring, $n \geq 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \alpha \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times(n+1)}$$

Zeigen Sie: $\det(A) = \alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}(\beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2)$

15. (a) Berechnen Sie zu jeder der beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

die komplementäre Matrix und damit, falls möglich, die inverse Matrix.

(b) Sei R ein kommutativer Ring, $n \geq 2$ und $A = (a_1, \ldots, a_n) \in R^{n\times n}$. Sei $C \in R^{n\times n}$ eine Matrix mit folgender Eigenschaft: Für jedes $b \in R^n$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die i-te Komponente von Cb gleich $\det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n)$ mit b an der Stelle i. Zeigen Sie: $C = \tilde{A}$.

16. Sei K ein Körper, $n \geq 2$, $A \in K^{n\times n}$ und $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix. Zeigen Sie:

   (a)
$$\operatorname{Rang}(\tilde{A}) = \begin{cases} n: & \operatorname{Rang}(A) = n \\ 1: & \operatorname{Rang}(A) = n-1 \\ 0: & \operatorname{Rang}(A) \leq n-2 \end{cases}$$

   (b) $\det(\tilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$, $\tilde{\tilde{A}} = (\det(A))^{n-2}A$.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 25.5.2004, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Auf jeder Lösung müssen sich zwei Namen und die Angabe der Übungsgruppe befinden, in der das Blatt zurückgegeben werden soll.
Die Klausur findet am Samstag, den 10.7.2004 um 11.30 Uhr statt, und zwar in den folgenden Räumen:

1. Gruppe A: 138
2. Gruppe B: E 51
3. Gruppe C: 122
4. Gruppe D: E 52