Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 2

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

5. Gegeben seien auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ die Linearformen

$$\varphi_1 : V \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\varphi_2 : V \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$\varphi_3 : V \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3$$

   Bestimmen Sie eine Basis v_1, v_2, v_3 von V derart, daß $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die zugehörige duale Basis von V^* ist.

6. Sei K ein Körper, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ die Folge mit 1 an der i-ten Stelle und $V = \langle e_1, e_2, e_3, \ldots \rangle$. Zeigen Sie:

$$X = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(e_i) = 0 \text{ für fast alle } i\}$$

   ist ein Unterraum von V^* mit $X^\circ = \{0\}$ und $X \subsetneqq X^{\circ\circ}$.

7. Eine Folge $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ von linearen Abbildungen heißt exakt, wenn $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ ist.

   (a) Zeigen Sie: Genau dann ist $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ exakt, wenn die Folge $Z^* \xrightarrow{g^*} W^* \xrightarrow{f^*} V^*$ exakt ist.

   (b) Was bedeutet (a) in den Spezialfällen $V = \{0\}$ bzw. $W = \{0\}$?

8. Gegeben seien die Permutationen $\sigma, \pi \in S_6$ durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechnen sie $\mathrm{ord}(\sigma)$ und $\mathrm{ord}(\pi)$ sowie die Permutationen $\sigma^2\pi^2$, $\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$, σ^{37} und π^{73}.

   (b) Stellen Sie σ und π als Produkt von Transpositionen dar.

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 11.5.2004, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.