Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 12

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

45. (a) Bestimmen Sie in $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt das orthogonale Komplement des Unterraumes

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

sowie die senkrechte Projektion von $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf U.

(b) Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$, $U \subset V$ ein Unterraum der Dimension $m \geq 0$ und $f : V \to V$ die Spiegelung an U. Zeigen Sie:

$$\chi_f = (X-1)^m (X+1)^{n-m} \qquad \det(f) = (-1)^{n-m}$$

46. Seien (V, σ) und (W, τ) euklidische Vektorräume. Zeigen Sie, daß für eine orthogonale Abbildung $f : V \to W$ äquivalent sind:

(i) Es gibt eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit

$$\tau(f(v), w) = \sigma(v, g(w))$$

für alle $v \in V, w \in W$.

(ii) $W = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)^{\perp}$

Geben Sie ein Beispiel, in dem die Bedingung (i) nicht erfüllt ist.

47. Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$, $V = U \oplus W$ eine direkte Zerlegung in Unterräume und $f \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch $f(u+w) = u$ für $u \in U$, $w \in W$. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist selbstadjungiert.

(ii) $W = U^{\perp}$.

(iii) Für alle $v \in V$ ist $||f(v)|| \leq ||v||$.

48. (a) Ersetzen Sie auf alle möglichen Weisen in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & * \\ * & 1/3 & * \\ * & * & 1/3 \end{pmatrix}$$

die Sterne so durch reelle Zahlen, daß dabei eine orthogonale Matrix entsteht.

(b) Eine reelle $n \times n$-Matrix heißt normal, wenn $AA^t = A^tA$ ist. Bestimmen Sie alle normalen 2×2-Matrizen. Welche unter ihnen sind orthogonal?

49. Gegeben sei die symmetrische, reelle 5×5-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, daß $\chi_A = (x-3)^2(x+1)^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, so daß $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix wird.

50. Sei (V, σ) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit der zugehörigen Metrik

$$d(x,y) = ||x-y||$$

Zeigen Sie, daß für eine Abbildung $f : V \to V$ äquivalent sind:

(i) Für alle $x, y \in V$ ist $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

(ii) Es gibt einen Punkt $p \in V$ und einen orthogonalen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $f(x) = p + \varphi(x)$ für alle $x \in V$.

Schöne Semesterferien und viel Erfolg im weiteren Studium!