Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 11

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

41. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $f \in \mathrm{End}(V)$, so daß $\chi_f \in K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß es einen diagonalisierbaren Endomorphismus g und einen nilpotenten Endomorphismus h von V gibt, so daß $f = g + h$ und $gh = hg$ ist.

42. Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Zeigen Sie:

    (a) Für jedes $x \in V$ ist die Abbildung $\sigma_x : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \sigma(x, v)$ linear.

    (b) Die Abbildung $w : V \to V^*,\ x \mapsto \sigma_x$ ist ein Isomorphismus.

    (c) Für jeden Unterraum U von V ist $U^\perp \cong U^\circ$.

43. Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

    (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{R},\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB^t)$ ein Skalarprodukt auf V ist.

    (b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von (V, σ).

    (c) Sei U der Unterraum aller oberen Dreiecksmatrizen. Beschreiben Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$.

44. Sei $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Abbildungen von $[-1, 1]$ nach $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

    $$\sigma(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

    Sei U der von den Abbildungen $f_i : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^i$ erzeugte Unterraum $(0 \leq i \leq 3)$ und g die Abbildung $[-1, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto |t|$. Berechnen Sie die senkrechte Projektion von g auf U.

Aufgrund von Sparmaßnahmen kann die Korrektur dieses Blattes vom Mathematischen Institut nicht finanziert werden. Es kann daher auch nicht abgegeben werden.

Die Klausur findet am Samstag, den 10.7.2004 um 11.30 Uhr statt.