Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 10

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

37. (a) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche A diagonalisiert. Geben Sie damit eine Formel für A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ an.

(b) Die Fibonacci-Zahlen $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ werden definiert durch $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a):

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

38. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_m$ $(m \geq 2)$ Unterräume von V mit $V = \sum_{i=1}^m U_i$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $U_i \cap U_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$, so folgt $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

(b) Ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ und X ein Unterraum von V, so folgt

$$X = (X \cap U_1) \oplus \ldots \oplus (X \cap U_m)$$

39. (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton die Potenzen A^{15}, A^{19} und A^{39} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(b) Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, daß der kommutative Ring

$$R_A = \{p(A) \mid p \in K[X]\}$$

außer der Null keine nilpotenten Elemente besitzt.

40. (a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine symmetrische 2×2-Matrix über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die zugehörige Bilinearform $\sigma(x, y) = x^t Ay$ genau dann positiv definit ist, wenn $r > 0$ und $rs - t^2 > 0$ ist.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \lambda\alpha_3\beta_3$$

ein Skalarprodukt auf V?

Jede Aufgabe wird mit fünf Punkten bewertet.
Abgabe: Dienstag, 6.7.2004, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Auf jeder Lösung müssen sich zwei Namen und die Angabe der Übungsgruppe befinden, in der das Blatt zurückgegeben werden soll.

Die Klausur findet am Samstag, den 10.7.2004 um 11.30 Uhr statt, und zwar in den folgenden Räumen:

1. Gruppe A: 138
2. Gruppe B: E 51
3. Gruppe C: 122
4. Gruppe D: E 52