Mathematisches Institut
der Universität München
H. Zöschinger

SS 2004
Blatt 1

Übungen zu MIIB: Lineare Algebra

1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und X ein Unterraum von V, Y ein Unterraum von W. Zeigen Sie:

   (a) $f(X)$ ist ein Unterraum von W, $f^{-1}(Y)$ ist ein Unterraum von V und es ist:

   $$f^{-1}(f(X)) = X + \mathrm{Kern}(f) \qquad f(f^{-1}(Y)) = Y \cap \mathrm{Bild}(f)$$

   (b) Sind V und W endlich-dimensional, so gilt:

   $$\dim(X) = \dim(X \cap \mathrm{Kern}(f)) + \dim(f(X))$$
   $$\dim(f^{-1}(Y)) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(Y \cap \mathrm{Bild}(f))$$

2. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und

   $$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha-\beta & \alpha-2\beta+\gamma \\ 0 & \beta & 2\beta-2\gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   Zeigen Sie, daß die Matrix

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   invertierbar ist und berechnen Sie $P^{-1}AP$ sowie alle Potenzen A^k für $k \geq 1$.

3. (a) Gegeben sei die lineare Abbildung

   $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}$$

   Zeigen Sie, daß f bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrabbildung g.

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung $f = l_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix A' von f bezüglich der Basen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Für jede Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ heißt $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ die Spur von A. Zeigen Sie für den K-Vektorraum $V = K^{n\times n}$ aller $n \times n$-Matrizen:

   (a) Die Abbildung $\mathrm{Spur} : V \to K$ ist linear.

   (b) Für alle $A, B \in V$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

   (c) Ist $f : V \to K$ eine lineare Abbildung mit $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in V$, so gibt es genau ein $\lambda \in K$ mit $f(A) = \lambda\,\mathrm{Spur}(A)$ für alle $A \in V$.

Aufgrund von Sparmaßnahmen kann die Korrektur dieses Blattes vom Mathematischen Institut nicht finanziert werden. Es kann daher auch nicht abgegeben werden.