Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 9

Übungen zur Algebra I

1. Sei G eine Gruppe. Die aufsteigende Zentralreihe

$$Z_0(G) \subset Z_1(G) \subset Z_2(G) \subset \ldots$$

ist folgendermaßen rekursiv definiert: Für $i = 0$ ist $Z_0(G) = \{e\}$, und für $i \geq 1$ ist $Z_i(G)$ der eindeutig bestimmte Normalteiler von G mit

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$$

Beweise, daß für ein $n \in \mathbb{N}_0$ genau dann $C^{n+1}(G) = \{e\}$ gilt, wenn $Z_n(G) = G$ ist. (6 Punkte)

2. Sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, mit $n \geq 3$.

   (a) Bestimme die Sylowuntergruppen von D_n und deren Anzahl. (3 Punkte)

   (b) Zeige, daß D_n genau dann nilpotent ist, wenn n eine Potenz von 2 ist. (2 Punkte)

3. Sei K ein Körper und R der Ring der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen mit Koeffizienten in K. Bestimme alle Linksideale, Rechtsideale und zweiseitigen Ideale von R. (4 Punkte)

4. Sei R ein Ring und $S = R^{n,n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeige: Ist A ein zweiseitiges Ideal von R, so ist

   $$A^{n,n} = \{(r_{ij}) \in S \mid \forall i, j \leq n : r_{ij} \in A\}$$

   ein zweiseitiges Ideal von S. (1 Punkt)

   (b) Ist B ein zweiseitiges Ideal von S, so gibt es ein zweiseitiges Ideal A von R mit $B = A^{n,n}$.
   (Hinweis: Rechne mit den Matrizen E_{ij}.) (4 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 12.1.2005, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Schöne Weihnachten und ein frohes neues Jahr!