Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 8

Übungen zur Algebra I

1. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl.

   (a) Zeige, daß die einzigen Permutationen in S_n, die mit $(1\,2\,\ldots\,n)$ vertauschbar sind, die Potenzen von $(1\,2\,\ldots\,n)$ sind. (2 Punkte)

   (b) Gilt dies auch für den Zykel $(1\,2\,\ldots\,n-1)$? (2 Punkte)

   (c) Zeige, daß $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ ist und daß für $n \geq 4$ auch $Z(A_n) = \{\mathrm{id}\}$ ist. (1 Punkt)

2. Sei G eine Gruppe der Ordnung $n = 2m$ mit ungeradem m. Zeige, daß G eine Untergruppe vom Index 2 enthält.
   (Hinweis: Satz von Cayley.) (5 Punkte)

3. Seien p und q verschiedene Primzahlen. Zeige, daß Gruppen der Ordnung p^2q nicht einfach sind. (4 Punkte)

4. Sei G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8. Nach Aufgabe 2 auf Blatt 6 hat $Z(G)$ die Ordnung 2. Zeige:

   (a) $G/Z(G)$ ist nicht zyklisch. (1 Punkt)

   (b) Es gibt ein Element $a \in G$ der Ordnung 4 . (1 Punkt)

   (c) Für $b \in G \setminus \langle a \rangle$ gilt: $bab^{-1} = a^{-1}$. (2 Punkte)

   (d) Es gilt $b^2 = e$ oder $b^2 = a^2$ (1 Punkt)

   (e) G ist zur Diedergruppe D_4 oder zur Quaternionengruppe Q isomorph. (1 Punkt)

Abgabe: Mittwoch, 22.12.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.