Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 7

Übungen zur Algebra I

1. Sei p eine Primzahl.

   (a) Bestimme die Anzahl der p-Sylowuntergruppen der symmetrischen Gruppe S_p. (2 Punkte)

   (b) Zeige: Ist P eine solche p-Sylowuntergruppe, so hat der Normalisator von P die Ordnung $(p-1)p$. (2 Punkte)

2. (a) Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 200. (2 Punkte)

   (b) Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 750. (4 Punkte)

3. Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 300.
   (Hinweis: Betrachte die Operation der Gruppe auf ihren p-Sylowuntergruppen.) (5 Punkte)

4. Sei n eine natürliche Zahl, p eine Primzahl und $K = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ der Körper mit p Elementen. Zeige:

   (a) Die Gruppe $G = GL_n(K)$ hat die Ordnung $p^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n}(p^i - 1)$. (2 Punkte)

   (b) Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonaleinträge gleich 1 sind, ist eine p-Sylowuntergruppe von G. (2 Punkte)

   (c) Ist H eine p-Untergruppe von G, so existiert ein $\alpha \in G$, so daß alle Matrizen in $\alpha H \alpha^{-1}$ obere Dreiecksmatrizen sind. (1 Punkt)

Abgabe: Mittwoch, 15.12.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.