Mathematisches Institut **WS 2004/2005**
der Universität München **Blatt 6**
W. Zimmermann

Übungen zur Algebra I

1. Sei $A \neq 0$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeige:

   (a) Es gibt $c_1, \ldots, c_s \in A \backslash \{0\}$, so daß $A = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}c_i$ ist und außerdem gilt:
   $$\operatorname{ord}(c_s) \mid \operatorname{ord}(c_{s-1}) \mid \ldots \mid \operatorname{ord}(c_2) \mid \operatorname{ord}(c_1)$$
   (4 Punkte)

   (b) Sind noch andere Elemente $c'_1, \ldots, c'_{s'} \in A \setminus \{0\}$ gegeben, so daß $A = \bigoplus_{i=1}^{s'} \mathbb{Z}c'_i$ ist und außerdem gilt:
   $$\operatorname{ord}(c'_{s'}) \mid \operatorname{ord}(c'_{s'-1}) \mid \ldots \mid \operatorname{ord}(c'_2) \mid \operatorname{ord}(c'_1)$$
   so ist $s = s'$ und $\operatorname{ord}(c_i) = \operatorname{ord}(c'_i)$ für alle $i = 1, \ldots, s$. (2 Punkte)

2. Sei p eine Primzahl und G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung p^3. Zeigen Sie, daß das Zentrum von G die Ordnung p hat. (3 Punkte)

3. Sei p eine ungerade Primzahl.

   (a) Man zeige, daß der Automorphismus
   $$\mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2},\ \bar{i} \mapsto \overline{(p+1)i}$$
   die Ordnung p hat, und konstruiere so einen Homomorphismus $\varphi_1 : \mathbb{Z}_p \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$. (1 Punkt)

   (b) Man zeige, daß der Automorphismus
   $$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p,\ (\bar{i}, \bar{j}) \mapsto (\bar{i} + \bar{j}, \bar{j})$$
   von $\mathbb{Z}_p^2 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ die Ordnung p hat, und konstruiere so einen Homomorphismus $\varphi_2 : \mathbb{Z}_p \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p^2)$. (1 Punkt)

   (c) Seien $G_1 := \mathbb{Z}_{p^2} \rtimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}_p$ und $G_2 := \mathbb{Z}_p^2 \rtimes_{\varphi_2} \mathbb{Z}_p$ die mit φ_1 bzw. φ_2 gebildeten semidirekten Produkte. Man zeige, daß das Zentrum von G_1 und G_2 zyklisch von der Ordnung p ist und gebe jeweils ein erzeugendes Element des Zentrums an. (2 Punkte)

(d) Man entscheide, ob die Gleichung $g^p = 1$ für alle Elemente der Gruppe G_1 bzw. für alle Elemente der Gruppe G_2 gilt. (2 Punkte)

4. Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ zeige man:

   (a) Es gibt eine Gruppe $G = \langle a, b \rangle$, die semidirektes Produkt von $\langle a \rangle \lhd G$ und $\langle b \rangle < G$ ist, wobei $\mathrm{ord}(a) = 2^n$, $\mathrm{ord}(b) = 4$, $ba = a^{-1}b$. (1 Punkt)

   (b) $D = \langle a^{2^{n-1}} b^2 \rangle$ ist ein Normalteiler der Ordnung 2 von G.(1 Punkt)

   (c) Für die Elemente $x := aD$, $y := bD$ in $Q := G/D$ gilt:

   $$\mathrm{ord}(x) = 2^n \qquad \mathrm{ord}(y) = 4 \qquad yxy^{-1} = x^{-1} \qquad x^{2^{n-1}} = y^2$$

   (1 Punkt)

   (d) Ist $z \in Q \setminus \langle x \rangle$, so ist $z^2 = y^2$. (1 Punkt)

   (e) Das Zentrum von Q ist die einzige Untergruppe der Ordnung 2 von Q. (1 Punkt)

   Die Gruppe Q heißt die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 2^{n+1}.

Abgabe: Mittwoch, 8.12.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.