Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 5

Übungen zur Algebra I

1. Sei G eine endliche Gruppe, p der kleinste Primteiler von $|G|$ und H eine Untergruppe vom Index $[G : H] = p$. Zeige, daß H Normalteiler von G ist.
   (Hinweis: Betrachte einen geeigneten Homomorphismus von G in die symmetrische Gruppe $S_{G/H}$.) (4 Punkte)

2. Zeige: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gilt:

$$n^{\varphi(m)} + m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{mn}$$

   (4 Punkte)

3. (a) Zeige: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^{193} \equiv a \pmod{195}$. (3 Punkte)

   (b) Ist $p > 2$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ so, daß a und $3p$ teilerfremd sind, so gilt

$$a^{3(p-1)} \equiv 1 \pmod{3p}$$

   (3 Punkte)

4. Bestimme die letzten zwei Ziffern der Zahl 9^{9^9}. (6 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 1.12.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.