Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 3

Übungen zur Algebra I

1. (a) Zeige: Sind C und C' Konjugationsklassen einer Gruppe G, so ist das Komplexprodukt CC' Vereinigung von Konjugationsklassen. (2 Punkte)

   (b) Bestimme alle endlichen Gruppen mit genau 2 Konjugationsklassen. (2 Punkte)

2. Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index n. Zeige:

   (a) Es gibt höchstens n zu H konjugierte Untergruppen. (1 Punkt)

   (b) $|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}| \leq n(|H|-1)+1$. (2 Punkte)

   (c) Wenn $H \neq G$ ist, so ist auch $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1} \neq G$. (1 Punkt)

   (d) $N := \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ ist der größte in H enthaltene Normalteiler von G. (2 Punkte)

   (e) Der Index von N in G teilt $n!$. (Hinweis: Betrachte die Operation von G auf den Linksnebenklassen von H.) (2 Punkte)

3. Sei p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und $N \lhd G$ ein Normalteiler mit $N \neq \{e\}$. Zeige, daß $N \cap Z(G) \neq \{e\}$ ist. (4 Punkte)

4. Zeige:

   (a) Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (2 Punkte)

   (b) Es gibt keinen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 17.11.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.