Mathematisches Institut **WS 2004/2005**
der Universität München **Blatt 2**
W. Zimmermann

Übungen zur Algebra I

1. (a) Zeige: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch. (2 Punkte)

   (b) Gilt das auch für $(\mathbb{R}, +)$? (2 Punkte)

2. Sei G eine endliche Gruppe, $a \in G$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei k teilerfremd zu $|G|$. Zeige, daß die Gleichung $x^k = a$ genau eine Lösung in G hat. (4 Punkte)

3. Sei G eine endliche Gruppe. H und K seien Untergruppen von G. Zeige:

   (a) Durch $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ wird auf $H \times K$ eine Äquivalenzrelation definiert. (2 Punkte)

   (b) Jede Äquivalenzklasse enthält genau $|H \cap K|$ Elemente. (2 Punkte)

   (c) Es gilt $|H| \cdot |K| = |HK| \cdot |H \cap K|$. (2 Punkte)

4. (a) Bestimme die Konjugationsklassen der Quaternionengruppe der Ordnung 8 (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 1). (3 Punkte)

   (b) Bestimme die Untergruppen und die Konjugationsklassen der Diedergruppe $D_4 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ (wobei $\mathrm{ord}(a) = 4$, $\mathrm{ord}(b) = 2$, $ba = a^3b$). (3 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 10.11.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.