Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 12

Übungen zur Algebra I

1. Ein Element r eines kommutativen Ringes R heißt ein Nullteiler, wenn es $0 \neq s \in R$ gibt mit $rs = 0$.

   (a) Zeige, daß R genau dann ein Integritätsring ist, wenn 0 der einzige Nullteiler von R ist. (1 Punkt)

   (b) Sei R ein Integritätsring, $a, b \in R$ zwei von Null verschiedene Elemente, und

   $$\alpha = a + (b) \in R/(b) \qquad \beta = b + (a) \in R/(a)$$

   Zeige, daß α genau dann ein Nullteiler von $R/(b)$ ist, wenn β ein Nullteiler von $R/(a)$ ist. (2 Punkte)

2. Sei R ein kommutativer Ring und seien $A \subsetneqq B$ Ideale von R, wobei B endlich erzeugt sei. Beweise, daß es ein Ideal C mit den folgenden Eigenschaften gibt:

   (a) $A \subset C \subsetneqq B$.

   (b) Es gibt kein Ideal D in R mit $C \subsetneqq D \subsetneqq B$. (4 Punkte)

3. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise:

   (a) Ist $s \in R$ nilpotent und P ein Primideal, so ist $s \in P$. (1 Punkt)

   (b) Ist $s \in R$ nicht nilpotent, dann gibt es in R ein Primideal P mit $s \notin P$. (4 Punkte)

   (c) Das Nilradikal $N(R)$ von R (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 10) ist der Durchschnitt aller Primideale von R. (1 Punkt)

4. Sei R ein Integritätsring und $\varphi : R[X, Y] \to R[Z]$ der eindeutig bestimmte R-Algebrenhomomorphismus mit

   $$\varphi(X) = Z^2 \qquad \varphi(Y) = Z^3$$

Beweise:

(a) $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist genau der Unterring von $R[Z]$, der aus den Polynomen $\sum_{i=0}^{n} r_i Z^i$ mit $r_1 = 0$ besteht. (2 Punkte)

(b) $\mathrm{Ker}(\varphi) = (Y^2 - X^3)$. (3 Punkte)

(c) $(Y^2 - X^3)$ ist ein Primideal von $R[X, Y]$. (2 Punkte)

(Hinweis: Im zweiten Aufgabenteil wende man Division mit Rest durch $Y^2 - X^3$ in $R[X][Y]$ an.)

Abgabe: Mittwoch, 2.2.2005, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.

Die Klausur findet am Samstag, den 29.1.2004, von 14.15 Uhr bis 16.30 Uhr statt, und zwar in den folgenden Räumen:

Gruppe A: 122

Gruppe B: 138

Gruppe C: E 51