Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 11

Übungen zur Algebra I

1. Zeige:

   (a) Sind U und V von Null verschiedene Untergruppen von $\mathbb{Q}$, so ist auch $U \cap V \neq 0$. (1 Punkt)

   (b) $\mathbb{Q}$ besitzt keine maximale Untergruppe. (2 Punkte)

   (c) Ist $U \subset \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, so besitzt auch $\mathbb{Q}/U$ keine maximale Untergruppe. (1 Punkt)

2. Sei R ein Integritätsring. Zeige:

   (a) Für ein von Null verschiedenes Element $r \in R$ ist das Ideal (r, X) von $R[X]$ genau dann ein Hauptideal, wenn r eine Einheit von R ist. (3 Punkte)

   (b) Ist R kein Körper, so gibt es Ideale in $R[X]$, die keine Hauptideale sind. (1 Punkt)

3. Sei R ein kommutativer Ring und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R[X]$ ein Polynom. Beweise:

   (a) Ist a_0 eine Einheit von R und sind $a_1, \ldots, a_n \in R$ nilpotent, (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 10), so ist f eine Einheit in $R[X]$. (2 Punkte)

   (b) Ist f eine Einheit in $R[X]$, so ist a_0 eine Einheit in R und $a_1, \ldots, a_n$ sind nilpotent. (4 Punkte)

   (Hinweis: Ist $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in R[X]$ invers zu f, so zeige im zweiten Aufgabenteil zuerst durch Induktion $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ für $0 \leq r \leq m$. Beweise dann die Behauptung durch Induktion nach n.)

4. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $R_m = \{a + b\sqrt{m} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. R_m ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

   (a) Zeige für $m = -2, 2, 3$, daß R_m bezüglich
   $$\delta(a + b\sqrt{m}) = |a^2 - mb^2|$$
   euklidisch ist. (2 Punkte)

(b) Zeige, daß die Einheiten von R_m genau diejenigen Elemente x von R_m sind, die $\delta(x) = 1$ erfüllen. (2 Punkte)

(c) Berechne die Einheiten von R_m für $m = -1, -2$. (2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 26.1.2005, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.