Mathematisches Institut **WS 2004/2005**
der Universität München **Blatt 10**
W. Zimmermann

Übungen zur Algebra I

1. Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Beweise:

   (a) $\mathbb{H}$ ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\mathbb{C}^{2,2}$, d. h. ein Unterring und ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum, dagegen keine $\mathbb{C}$-Unteralgebra. (2 Punkte)

   (b) Die Elemente

   $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   bilden eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{H}$. (1 Punkt)

   (c) Die Abbildung

   $$^h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

   ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt $(AB)^h = B^h A^h$ für alle $A, B \in \mathbb{H}$. (1 Punkte)

   (d) $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper. (2 Punkte)

   (Hinweis: Berechne AA^h.)

2. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Beweise:

   (a) Die Menge $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus (p)\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$, der $\mathbb{Z}$ enthält. (2 Punkte)

   (b) $\mathbb{Z}_{(p)}^\times = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z} \setminus (p)\}$ (1 Punkt)

   (c) Jedes von Null verschiedene Ideal von $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist ein Hauptideal, das von einer Potenz von p erzeugt wird. (2 Punkte)

   (d) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}_{(p)}p^n \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$. (2 Punkte)

   (Hinweis: Ist A ein Ideal von $\mathbb{Z}_{(p)}$, so betrachte $A \cap \mathbb{Z}$.)

3. Ein Element a eines kommutativen Ringes R heißt nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $a^k = 0$ ist. Zeige:

   (a) Die Menge $N(R)$ aller nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal, das sog. Nilradikal von R. (1 Punkt)

   (b) $R/N(R)$ enthält keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente. (1 Punkt)

   (c) Ist $a \in N(R)$, so ist $1 - a \in R^{\times}$. (1 Punkt)

4. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl.

   (a) Bestimme $N(\mathbb{Z}_n)$ und $\mathbb{Z}_n/N(\mathbb{Z}_n)$. (2 Punkte)

   (b) Ein Element mit $e^2 = e$ heißt ein Idempotent. Wieviele Idempotente enthält der Ring $\mathbb{Z}_n$? (2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 19.1.2005, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.