**Mathematisches Institut**
**der Universität München**
**W. Zimmermann**

**WS 2004/2005**
**Blatt 1**

# Übungen zur Algebra I

1. Sei $K$ ein Körper und $G$ die Menge aller Abbildungen der Form

$$f_{\alpha,\beta} : K \to K,\ x \mapsto \alpha x + \beta$$

mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$, $\beta \in K$.

   (a) Zeige, daß $G$ unter der Komposition eine Gruppe ist. (2 Punkte)

   (b) Für welche Körper ist $G$ abelsch? (1 Punkt)

   (c) Sei $U$ die Menge aller $f_{\alpha,0}$, $\alpha \in K \setminus \{0\}$, und $V$ die Menge aller $f_{1,\beta}$, $\beta \in K$. Zeige, daß $U$ und $V$ abelsche Untergruppen von $G$ mit

$$G = U \cdot V = V \cdot U, \qquad U \cap V = \{e\}$$

   sind und daß $xVx^{-1} = V$ für alle $x \in G$ gilt. (3 Punkte)

2. Sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Gruppe aus vier verschiedenen Elementen. Bestimme die möglichen Gruppentafeln, die man mit diesen vier Elementen bilden kann, wobei $e$ das neutrale Element sei.

   (Hinweis: Sie müssen nicht explizit ausführen, daß diese Gruppentafeln wirklich Gruppen liefern, insbesondere müssen Sie das Assoziativgesetz nicht explizit überprüfen. Andererseits dürfen weder zuviele noch zuwenige Gruppentafeln in Ihrer Lösung auftauchen. Beachten Sie, daß man aus jeder Gruppentafel eine weitere bekommt, indem man die Elemente $a, b, c$ vertauscht, und überlegen Sie sich, welche Tafeln aus welchen auf diese Weise entstehen und ob sich dabei wirklich immer eine neue ergibt.) (6 Punkte)

3. Sei $Q = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ mit $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b) = 4$, $a^2 = b^2$, $ba = a^3b$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8.

   (a) Bestimme die Ordnungen der Elemente und alle Untergruppen. (2 Punkte)

   (b) Zeige, daß für alle Untergruppen $H \subset Q$ und alle $x \in Q$ die Gleichung $xHx^{-1} = H$ gilt. (2 Punkte)

4. Sei $G$ eine Gruppe, die von zwei Elementen $a, b$ erzeugt wird, und es gebe $k, n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = e$, $ba = ab^k$. Zeige:
   (a) $G = \{a^i b^j \mid 0 \leq i < n, j \in \mathbb{Z}\}$ (2 Punkte)
   (b) Wenn $k > 1$ ist, dann gibt es $m > 1$ mit $b^m = e$. (2 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, 3.11.2004, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Die Aufgaben sollen von Zweiergruppen bearbeitet werden, die jeweils zusammen abgeben. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung diese beiden Namen und die Tutorgruppe an, für die Sie sich eingetragen haben. Falls Sie sich für verschiedene Gruppen eingetragen haben, geben Sie eine dieser Gruppen an.

## Ausgewählte Lehrbücher


1. M. Artin: Algebra, Birkhäuser, Basel, 1998
2. S. Bosch: Algebra, Springer, Berlin, 2004
3. N. Bourbaki: Algèbre 1-10, Hermann, Paris, 1964
4. P. M. Cohn: Algebra I, II, III, Wiley, New York, 1982
5. N. Jacobson: Lectures in abstract algebra I, II, III, Springer, Berlin, 1976
6. N. Jacobson: Basic Algebra I, II, Freeman, New York, 1985
7. E. Kunz: Algebra, Vieweg, Braunschweig, 1994
8. H. Kurzweil/B. Stellmacher: Theorie der endlichen Gruppen, Springer, Berlin, 1998
9. S. Lang: Algebra, Springer, Berlin, 2002
10. F. Lorenz: Einführung in die Algebra I, II, Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1992
11. G. Stroth: Algebra, de Gruyter, Berlin, 1998
12. B. L. van der Waerden: Algebra I, II, Springer, Berlin, 1931